Sociedad Matemática Paraguaya

Introducción a Geometría Diferencial

ESCUELA DE GEOMETRÍA

Inocencio Ortiz

FIUNA - San Lorenzo
Mayo, 2019

Contenido

CAPÍTULO 1

Curvas en el espacio

La nocion de curva es intuitiva y familiar para todos, como cuando hablamos de bajar la velocidad de un vehículo para tomar una curva muy cerrada, o expresar que una columna está curvada. Como casi cualquier concepto que tiene un uso frecuente en nuestras vidas, la flexibilidad de nuetro lenguaje cotidiano introduce una falta de precisión respecto de tales conceptos. Nuestro objetivo es estudiar las curvas desde un punto de vista matemático, y para poder hacerlo necesitaremos introducir una idea precisa de curva. En este capítulo daremos la definición de curva que no será de interés para el resto del curso, y estudiaremos algunas de sus propiedades básicas.

1.1 Curvas parametrizadas

Una *curva parametrizada diferenciable* en $\mathbb{R}^n$ (puede considerar $n = 2, 3$) es un mapa diferenciable

$$\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

definida en un intervalo abierto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

Observación 1. *Recordemos lo que significa que un mapa $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ sea diferenciable: Para mayor claridad, tomemos $n = 3$, entonces para cada $t \in (a, b)$, tenemos $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, y como tal, debemos tener $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ donde $x, y, z\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, son funciones reales de una variable real. Afirmar que α es diferenciable es afirmar que estas funciones son diferenciables. En general, la diferenciabilidad solo requiere la exitencia y continuidad de la primera derivada, nosotros en cambio establecemos ahora que la palabra diferenciable significará infinitamente diferenciable.*

Notemos que en el intervalo $I = (a, b)$ podemos tener $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$. El trazo de

α es el conjunto $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$. Este conjunto es lo que usualmente llamamos curva en nuestro lenguaje cotidiano. Para nosotros es importante distinguir entre una curva parametrizada (el mapa $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$) y su trazo (el conjunto $\alpha(I)$). Dos curvas diferentes $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ y $\beta\colon J \to \mathbb{R}^n$ pueden tener el mismo trazo, es decir, $\alpha(I) = \beta(J) = C$. Decimos entonces que α y β son parametrizaciones diferentes del conjunto C.

Ejemplo 1.1.1. *1. El mapa $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, es una curva parametrizada diferenciable.*

2. El mapa $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $\alpha(t) = (t, |t|)$ no es una curva parametrizada diferenciable.

Dada una curva parametrizada diferenciable $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, definimos su *velodidad* (o *o vector tangente*) como el vector $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t) \in \mathbb{R}^3$. Decimos α es *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. En este caso, para cada $t \in I$ queda bien definida la *recta tangente*

$$r(\alpha, t) = \{\alpha(t) + \tau\alpha'(t); \tau \in \mathbb{R}\}. \tag{1.2}$$

Geométricamente, esta es la recta tangente al trazo $\alpha(I)$ en el punto $\alpha(t)$.

Ejemplo 1.1.2. *1. La curva parametrizada diferenciable $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, con $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, es regular.*

2. La curva parametrizada diferenciable $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ no es regular. Note que $\alpha'(0) = (0, 0)$. Note además que para ser diferenciable, debe cumplirse $\alpha'(0) = (0, 0)$.

3. La curva parametrizada diferenciable $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es regular. Tenemos $\alpha(2) = (0, 0) = \alpha(-2)$, es decir, no es inyectiva.

4. La curva parametrizada diferenciable $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\frac{t^4}{4} - 2t^2, \frac{t^3}{3} - 4t)$ no es regular. Su derivada es $\alpha'(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, que satisface $\alpha'(2) = (0, 0) = \alpha'(-2)$. En este caso, el trazo de la curva no tiene cúspides, y puede ser reparametrizada de forma que sea regular.

Observación 2. *Las curvas parametrizadas diferenciables regulares son el tipo de curvas en que estaremos más interesados, y su nombre es muy largo, entonces convengamos, de ahora en adelante, que la palabra* curva regular *(o inclusive* curva*) significará curva parametrizada diferenciable regular, a menos que indiquemos explicitamente de otra forma.*

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ una curva regular. Definimos su *longitud de arco* entre $t_0 \in I$ y $t \in I$ como

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)| d\tau. \tag{1.3}$$

Como $|\alpha'(t)| \neq 0$ para todo $t \in I$, la función $s\colon I \to \mathbb{R}$ definida por 1.3 es diferenciable, y tenemos, del teorema fundamental del cálculo

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|. \tag{1.4}$$

Observemos que la longitud de arco no depende de la parametrización. Para ver eso, supongamos $\beta\colon J \to \mathbb{R}^n$ sea una reparametrización regular de α. Esto quiere decir que existe un mapa $\phi\colon J \to I; \tilde{t} \mapsto t$ que es una biyección diferenciable monótona ($\phi' > 0$, o bien $\phi' < 0$), tal que $\beta = \alpha \circ \phi$. Sea entonces $p = \alpha(t_0)$ y $q = \alpha(t_1)$, y sean $\tilde{t_0}, \tilde{t_1} \in J$ tales que $\beta(\tilde{t_0}) = p$ y $\beta(\tilde{t_1}) = q$. Por tanto, resulta (suponiendo $\phi' > 0$):

$$\int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t_1}} |\beta'(\tilde{t})| d\tilde{t} = \int_{\tilde{t_0}}^{\tilde{t_1}} |\phi'(\tilde{t})\alpha'(t)| d\tilde{t} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{|\phi'(\tilde{t})\alpha'(t)|}{\phi'(\tilde{t})} dt = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt. \tag{1.5}$$

Esto es, la longitude de arco del trazo $\alpha(I)$ entre dos de sus puntos cualesquiera es independiente de la paramatrización (regular) que utilicemos.

Cuando $|\alpha'(t)| = 1$, observamos de 1.3 que el parámetro t ya es la longitud de arco, y decimos entonces que α está parametrizada por longitud de arco. La mayoría de los conceptos que nos van a interesar no dependen de la parametrización de la curva (desde que sean regulares), y por tanto vamos a suponer por defecto que las curvas están parametrizadas por longitud de arco, a menos que se indique de otra forma.

1.2 Triedro de Frenet-Serret

En esta sección veremos que a toda curva regular en $\mathbb{R}^3$ está asociado un sistema de referencia, conocido como el triedro de Frenet-Serret. Comenzamos con una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ tal que $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}^3$. Definimos la *curvatura* de α en $s \in I$ como el número

$$\kappa(s) = |\alpha''(s)|. \tag{1.6}$$

Proposition 1.2.1. *Dada $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, se tiene $\kappa(s) = 0$ si, y sólo si, existen $u, v \in \mathbb{R}^3$, con $|u| = 1$ tales que $\alpha(t) = ut + v$.*

Prueba. Supongamos que $\alpha(t) = ut + v$, con $|u| = 1$, entonces, derivando dos veces resulta $\alpha''(s) = 0$, y por tanto $\kappa(s) = |\alpha''(s)| = 0$. Reciprocamente, supongamos que $\alpha(t)$ es tal que $\kappa(s) = |\alpha''(s)| = 0$, integrando obtenemos $\alpha(s) = us + v$. □

De esta forma, vemos que nuestra definición de *curvatura* recupera nuestra noción usual: *la curvatura de α es cero si y sólo si α es una recta*. Note que el número $|\alpha''(s)|$ "mide" la rapidez con que la curva se aparta de la dirección $\alpha'(s)$.

Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\kappa(s) \neq 0$, entonces podemos definir un vector unitario $\eta(s)$

tal que

$$\alpha''(s) = \kappa(s)\eta(s). \tag{1.7}$$

Oberve entonces que tenemos $\alpha''(s) \perp \alpha'(s)$. En efecto:

$$1 = |\alpha'(s)|^2 = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle \Rightarrow 0 = 2\langle \alpha''(s), \alpha'(s).$$

Así, $\eta(s)$ es ortogonal a $\alpha'(s)$, y lo llamamos el *vector normal* a α en $s \in I$. Al plano definido por $\alpha'(s)$ y $\eta(s)$ se lo conoce como *plano osculador*.

Denotemos ahora $t(s) = \alpha'(s)$. Entonces resulta

$$t'(s) = \alpha''(s) = \kappa(s)\eta(s),$$

y definimos el vector *binormal* como

$$b(s) = t(s) \times \eta(s). \tag{1.8}$$

De esta definición resulta entonces:

$$b'(s) = t'(s) \times \eta(s) + t(s) \times \eta'(s) = \kappa(s)\eta(s) \times \eta(s) + t(s) \times \eta'(s) = t(s) \times \eta'(s),$$

es decir, $b'(s) \perp t(s)$. Además, de $|b(s)| = 1$ resulta que $b'(s) \perp b(s)$. Se concluye entonces que $b'(s) = \tau(s)\eta(s)$, para algún número $\tau(s)$. Este número es conocido como la *torsión* de α en $s \in I$.

Proposition 1.2.2. *Dada una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, tenemos $\tau(s) = 0$ si, y sólo si, α es una curva plana. (Esto es, $\alpha(I)$ está contenido en un plano).*

Prueba. Si α es una curva plana, su trazo está contenido en el plano definido por $\alpha'(s)$ y $\eta(s)$, por tanto $b(s)$ es constante, y entonces $b'(s) = 0$, por lo cual $\tau(s) = 0$. Recíprocramente, si $0 = \tau(s) = b'(s)$, tenemos $b(s) = b_0$, constante, y por lo tanto

$$\langle \alpha(s), b_0 \rangle' = \langle \alpha'(s), b_0 \rangle = 0.$$

Así, $\langle \alpha(s), b_0 \rangle$ es constante, es decir, α queda contenido en un plano ortogonal a b_0. □

Vemos así que la torsión es una medida de cuánto una curva deja de ser plana.

Observación 3. *A diferencia de la curvarura, la torsión puede ser negativa. A esto se le puede dar una interpretación geométrica, definiendo* positivo *el lado del plano osculador hacia donde apunta la binormal.*

Dada una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, tenemos a ella asociado, para cada $s \in I$, un triedro ortonormal $\{t(s), \eta(s), b(s)\}$, conocido como el triedro de Frenet-Serret. Las derivadas $t'(s) = \kappa(s)\eta(s)$ y $b'(s) = \tau(s)\eta(s)$, expresadas en el triedro de Frenet-Serret, proporcionan entidades geométricas importantes; la curvatura y la torsión. Podríamos esperar que la derivada $\eta'(s)$ nos diera otra información geométrica, para saberlo, calculamos:

$$\eta'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) = \tau(s)\eta(s) \times t(s) + b(s) \times \kappa(s)\eta(s) = -\tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s),$$

así, no obtenemos ninguna información nueva.

Será conveniente organizar las informaciones de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcc} t' & = & \kappa\eta \\ \eta' & = & -\kappa t - \tau b \\ b' & = & \tau\eta \end{array} \leftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ \eta \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \eta \\ b \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Estas son las ecuaciones de Frenet-Serret. Podemos imaginar, intuitivamente, que podemos obtener calquier curva a partir de una recta, curvándolo y torsiéndolo apropiadamente. Esa idea intuitiva se formaliza con el siguiente resultado, que establece que la curvatura y la torsión caracterizan localmente a la curva α. Más precisamente, vale el siguiente resultado

Teorema 1.2.3 (Teorema fundamental de las curvas parametrizadas)**.** *Dadas funciones diferenciables $\kappa, \tau \colon I \to \mathbb{R}$, conn $\kappa > 0$, existe una única curva $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ (a menos de movimientos rígidos) parametrizada por longitud de arco tal que κ es su curvatura y $\tau(s)$ es su torsión.*

Observación 4. *Un mapa $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido si es de la forma $R(v) = Av + p$, donde $p \in \mathbb{R}^3$ es un vector fijo y $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un operador ortogonal ($AA^t = \mathrm{I}$, siendo I la identidad), con determinante positivo. Al operador A se lo conoce como la parte homogénea de R.*

Idea de la prueba. La unicidad quiere decir que si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ y $\overline{\alpha}\colon I \to \mathbb{R}^3$ son dos curvas regulares con $\kappa(s) = \overline{\kappa}(s)$ y $\tau(s) = \overline{\tau}(s)$, para todo $s \in I$, entonces existe un movimiento rígido $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(s) = R(\overline{\alpha}(s))$. Para probarlo, se observa primero que la curvatura y la torsión son invariantes por movimientos rígidos. Sean entonces $F_0 = \{t_0, \eta_0, b_0\}$ y $\overline{F}_0 = \{\overline{t}_0, \overline{\eta}_0, \overline{b}_0\}$ los triedros de Frenet-Serret de α y $\overline{\alpha}$, respectivamente, en un determinado $s_0 \in I$. Exite un movimiento rígido que lleva $\overline{F}_0$ a F_0. Después de aplicar dicha transformación, tendremos que $(t(s), \eta(s), b(s))$ y $(\overline{t}(s), \overline{\eta}(s), \overline{b}(s))$ son, ambas, soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales de Frenet-Serret:

$$\begin{pmatrix} t \\ \eta \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \eta \\ b \end{pmatrix},$$

con identicas condiciones iniciales. Siendo un sistema lineal, sigue, del Teorema de existencia y uncidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, que ambas soluciones coinciden en I. En particular, $\alpha'(s) = t(s) = \overline{t}(s) = \overline{\alpha}'(s)$, de donde obtenemos

$$\alpha(s) = \overline{\alpha}(s) + a,$$

para algún vector $a \in \mathbb{R}^3$. De $\alpha(s_0) = \overline{\alpha}(s_0)$ se concluye que $a = 0$. Así, $\alpha = \overline{\alpha}$

Para concluir existencia, comenzamos con las ecuaciones de Frenet-Serret

$$\begin{pmatrix} t \\ \eta \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \eta \\ b \end{pmatrix},$$

que admite solución única $(t(s), \eta(s), b(s))$, definida para todo $s \in I$ satisfaciendo las condiciones iniciales $(t(s_0), \eta(s_0), b(s_0)) = (t_0, \eta_0, b_0)$. Puede además demostrarse que como las condiciones iniciales son ortogonales, esta ortogonalidad se mantiene para todo $s \in I$. Definimos entonces la curva

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} |t(s)| ds. \tag{1.10}$$

Debe verificarse ahora que esta curva tiene la curvatura y torsión especificadas. □

1.3 Ejercicios

1. Dada una curva parametrizada $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$, no necesariamente por longitud de arco, podemos definir su *vector de curvatura* en el punto $s \in J$ como

   $$\eta_\beta(s) = (\beta \circ \phi)''(\phi^{-1}(s)),$$

   donde $\phi\colon I \to J$ es una reparametrización por longitud de arco.

   - Muestre que $\eta_\beta(s)$ no depende de la parametrización por longitud de arco escogida.
   - Muestre que se tiene la expresión

     $$\eta_\beta(s) = \frac{\beta''}{|\beta'|^2} - \frac{\beta' \cdot \beta''}{|\beta'|^4}\beta',$$

     donde $\beta' \cdot \beta''$ indica producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$, y $|\beta'|$ es el módulo inducido por dicho producto escalar.
   - Podemos definir la curvatura de β en s, $\kappa_\beta(s)$, como el módulo de su vector de curvatura en s. Muestre que tenemos

     $$\kappa_\beta(s) = \frac{|\beta'(s) \times \beta''|}{|\beta'|^3},$$

     y para el vector normal unitario

     $$\eta(s) = \frac{\eta_\beta(s)}{\kappa_\beta(s)} = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s) \times \beta''(s)|}\beta''(s) - \frac{\beta'(s) \cdot \beta''(s)}{|\beta'(s)||\beta'(s) \times \beta''(s)|}\beta'(s).$$

- El vector binormal unitario a β en s queda definido por

$$b(s) = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|} \times \eta(s).$$

Muestre que tenemos

$$b(s) = \frac{\beta'(s) \times \beta''(s)}{|\beta'(s) \times \beta''(s)|}. \tag{1.11}$$

Estos cálculos muestran que, en la práctica, dada $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ se calculan directamente $t(s) = \frac{\beta'(s)}{|\beta'(s)|}$, y $b(s)$ por la ecuación 1.11, para luego calcular $\eta(s) = b(s) \times t(s)$.

2. Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con triedro de Frenet-Serret F. Si $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido, muestre que $\beta(s) := R(\alpha(s))$ es una curva regular con triedro de Frenet-Serret $A(F)$, donde A es la parte homogénea de R. Concluya que α y β tienen la misma longitud de arco, curvatura, y torsión.

3. Muestre que la curva dada por la ecuación 1.10 es regular, parametrizada por longitud de arco, y tiene la curvatura y la torsión especificadas.

CAPÍTULO 2

Superficies regulares

En este capítulo nos proponemos estudiar las llamadas superficies regulares de $\mathbb{R}^3$. Así como con las curvas, si bien la palabra superficie tiene un uso común e intuitivo en nuestro lenguaje cotidiano, a fin de hacer un estudio sistemático necesitaremos definir con claridad el concepto subyacente a dicha palabra. Claro está, que la primera prueba que debe superar nuestra definición de superficie es recuperar nuestra noción intuitiva, por lo menos en casos favorables. Una vez que hayamos definido con precisión la noción de superficie, comenzaremos a definir estructuras sobre ellas, las cuales nos permitirán hacer geometría, y entender la noción de curvatura, introducida por Gauss.

2.1 Definición

Dado un número $r > 0$, y un punto $p \in \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$, la *bola abierta* de centro p y radio r es el conjunto

$$B(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - p| < r\},$$

donde $|v|$ es la norma del vector $v \in \mathbb{R}^n$.

Un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se llama *abierto* si para cada $p \in V$, existe una bola abierta $B(p, r) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B(p, r) \subset V$. Un *entorno* de $p \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $p \in V$.

Una *superficie regular* en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que, todo $p \in S$, tiene un entorno $V \subset \mathbb{R}^3$, y un mapa $\phi\colon U \to V \cap S$, de un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, satisfaciendo las siguientes propiedades:

a) ϕ es diferenciable. Esto es, viendo $\phi\colon U \to \mathbb{R}^3$, con funciones coordenadas $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, las funciones $x, y, z\colon U \to \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales continuas de todas las órdenes.

b) ϕ es un homeomorfismo. Esto es, en vista de la condición a), que existe su inversa $\phi^{-1}\colon V \cap S \to U$ y es continua, lo que a su vez significa que ϕ^{-1} es la restricción de una función continua $F\colon W \subset \mathbb{R}^3 \to U$, con $V \cap S \subset W$.

c) Para cada $q \in U$, el diferencial (matriz Jacobiana) $d\phi|_q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectivo.

INSERTAR GRÁFICO.

El mapa ϕ se llama una *parametrización*, o un *sistema de coordenadas* en torno de p, y el conjunto $V \cap S$ un entorno coordenado de p.

Observación 5.

- *La condición b) tiene por objetivo evitar autointersecciones. En efecto, si el conjunto S tuviese autointersecciones, para un punto p en dicha intersección, y cualquier entorno $p \in V \subset \mathbb{R}^3$, no podríamos tener $V \cap S$ homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^2$. La continuidad de la inversa ϕ^{-1} es una condición útil para mostrar que ciertos conceptos definidos sobre parametrizaciones, no dependen de la parametrización escogida. Eso permite extender definiciones locales a globales.*
- *La condición c) será útil para definir el "plano tagente", el cual será fundamental en nuestro estudio.*

2.1.1 Ejemplos

Antes de sumergirnos en el estudio de las superficies, listemos algunos ejemplos.

1. Esfera unitaria: Definimos el conjunto

$$S^2 := \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Tomamos $U = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ y definimos

$$\phi_+\colon U \to S^2; (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}).$$

Tenemos entonces que $\phi_+(U) = S^2 \cap \mathbb{R}^3_+$, donde $\mathbb{R}^3_+ := \{(x, y, z); z > 0\}$. Como $(u, v) \in U$ implica $u^2 + v^2 < 1$, resulta ϕ diferenciable, y por tanto satisface la condición 1. Para verificar la condición 2, observamos que ϕ_+^{-1} es la restricción a $S \cap \mathbb{R}^3$ de la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, la cual es continua. Para la condición 3, calculamos

$$d\phi_+ = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} & \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{1 - (u^2 + v^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \star & \star \end{pmatrix},$$

que es inyectiva. Esta parametrización sirve para todos los puntos del hemisferio superior de la esfera. Similarmente, podríamos obtener una parametrización para el hemisferio inferior, y con eso sólo nos faltaría parametrizar el ecuador. Podemos lograr eso mediante la parametrización de otros cuatro hemisferios (frontal, posterior, lateral izquierdo y lateral derecho).

2. Gráfico de funciones: Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos su gráfico como el conjunto
$$gr(f) := \{(u, v, f(u, v)); (u, v) \in U\}.$$
Afirmamos que $gr(f)$ es una superficie regular. En efecto, una parametrización es dada por
$$\phi\colon U \to gr(f); (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v)).$$
Claramente, tenemos $\phi(U) = gr(f) = gr(f) \cap \mathbb{R}^3$, y ϕ diferenciable, y así tenemos la condición 1. Respecto de la condición 2, observamos que ϕ^{-1} es la restricción a $gr(f)$ de la proyección $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, que es continua. Para la condición 3, calculamos:
$$d\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \star & \star \end{pmatrix},$$
que es inyectiva. Note que en este caso, una única parametrización sirve para todos los puntos del conjunto $gr(f)$.

3. Superficies de nivel: Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un mapa diferenciable. Dado un punto $a \in \mathbb{R}$, llamamos conjunto de nivel al conjunto $f^{-1}(a) := \{p \in \mathbb{R}^3; f(p) = a\}$. Un punto $a \in \mathbb{R}$ se llama *valor regular* de f si $df|_q$ es sobreyectiva para todo $q \in f^{-1}(a)$. Afirmamos que si a es un valor regular, entonces $f^{-1}(a)$ es una superficie regular. En efecto, sea $p \in f^{-1}(a)$. Que df_p sea sobreyectivo es equivalente a que por lo menos una de las derivadas parciales $\partial_u f$, $\partial_v f$ o $\partial_w f$ no se anule en p. Digamos que sea $\partial_w(f)|_p \neq 0$. Definamos una mapa auxiliar
$$F\colon U \to \mathbb{R}^3; (u, v, w) \mapsto (u, v, f(u, v, w)) = (u, v, z).$$
Notamos entonces que tenemos
$$dF_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_u f|_p & \partial_v f|_p & \partial_w f|_p \end{pmatrix} \Rightarrow \det(dF_p) = \partial_w f|_p \neq 0.$$
Sigue entonces, del Teorema de la función inversa, que existen abiertos $p \in V \subset \mathbb{R}^3$ y $F(p) \in W \subset \mathbb{R}^3$ tales que $F\colon V \to W$ es un difeomorfismo, esto es, que admite una inversa diferenciable
$$F^{-1}\colon W \to V; (x, y, z) \mapsto (x, y, g(x, y, z)).$$

En particular, g es diferenciable, y tenemos

$$w = g(x, y, a) = h(u, v),$$

siendo entonces h una función diferenciable definida en la proyección de V sobre el plano $\{w = 0\}$. Como $F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(x, y, a)\}$, resulta

$$f^{-1}(a) \cap V = gr(h),$$

que, por el ejemplo anterior, es una superficie regular. Como hemos elegido $p \in f^{-1}(a)$ de forma arbitraria, este argumento proporciona una paramatrización en torno de cualquier $p \in f^{-1}(a)$.

4. Elipsoide, Paraboloides, e Hiperboloides: El ejemplo anterior proporciona otros varios ejemplos, ya que basta mostrar que un determinado conjunto es imagen inversa de un valor regular. Por ejemplo, el elipsoide es definido por la ecuación

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1.$$

Note entonces que dicho conjunto es la imagen inversa de $0 \in \mathbb{R}$ por la función $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} - 1,$$

para la cual, 0 es valor regular (verifique). Los dos paraboloides (eliptico e hiperbólico), así como los hiperboloides (de una y dos hojas) se obtienen de manera similar, al considerar sus ecuaciones, que son, respectivamente:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - w = 0,$$

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} - w = 0,$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = -1.$$

Ejercicio 2.1.1. *Muestre que los siguientes conjuntos son superficies regulares.*

1. *El* Toro, *definido como*

$$\mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1,$$

donde $S^1 := \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$.

2. *El cilindro recto sobre el círculo* $x^2 + y^2 = 1$.

3. El cilindro recto sobre el trazo de una curva que no se autointersecta.

4. Dada una curva plana $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$, sin autointersecciones, y un vector fijo $u \in \mathbb{R}^3$ transversal al plano de la curva, el conjunto definido por

$$S(\alpha, u) := \{\alpha(t) + \tau u; t \in (a,b), \tau \in \mathbb{R}\}.$$

2.2 El plano tangente

Dado un mapa diferenciable $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, hemos mencionado que su diferencial $d\phi|_q$ en un punto $q \in U$ es simplemente su matriz Jacobiana evaluada en q. Existe, sin embargo, una forma más intrínseca de definir el mapa $d\phi|_q$, como indicamos a continuación: sea $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces definimos

$$d\phi|_q(v) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\phi(\alpha(s))),$$

donde $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^2$ es una curva regular satisfaciendo $\alpha(0) = q$ y $\alpha'(0) = v$. Esta definición nos será útil en adelante.

Ejercicio 2.2.1. *Muestre que $d\phi_q(v) = J_\phi(q)v^t$, donde $J_\phi(q)$ es la matriz jacobiana de ϕ evaluada en q. En particular, es independiente de la curva α considerada.*

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, y $p \in S$. Definimos el *plano tangente* a S en p como el conjunto

$$T_p(S) := \{\alpha'(0); \alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to S; \quad \text{diferenciable con} \quad \alpha(0) = p\} \tag{2.1}$$

Esta definición será útil, sin embargo, no deja nada claro que $T_p(S)$ sea un plano, ni mucho menos que sea un espacio vectorial, como de hecho lo es. Para subsanar eso, probaremos el siguiente resultado

Teorema 2.2.2. *Sea $\phi\colon U \to S$ una parametrización en torno de $p \in S$. Podemos asumir que $0 \in U$ y $\phi(0) = p$. Entonces $d\phi|_0(\mathbb{R}^2) = T_p(S)$*

Prueba. Sea $w \in T_p(S)$, por tanto existe una curva $\alpha\colon I = (-\epsilon, \epsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Podemos suponer que $\alpha(I) \subset \phi(U)$. Definamos entonces $\beta\colon I \to U$ poniendo $\beta(s) = \phi^{-1}(\alpha(s))$, y sea $v = \beta'(0)$. Afirmamos que $d\phi_0(v) = w$, en efecto:

$$d\phi_0(v) := \frac{d}{ds}|_{s=0}(\phi(\beta(s))) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\phi(\phi^{-1}(\beta(s)))) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\alpha(s)) = w.$$

Así, $T_p(S) \subset d\phi|_0(\mathbb{R}^2)$. Para probar la inclusión en el otro sentido, sea $w = d\phi|_0(v)$, por tanto existe una curva $\beta\colon I \to U$ tal que $\beta(0) = 0$ y $\beta'(0) = v$, entonces $w = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\phi(\beta(s))) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\alpha(s))$, siendo $\alpha = \phi \circ \beta\colon I \to S$ con $\alpha(0) = \phi(\beta(0)) = p$. Es decir, $w \in T_p(S)$. $\square$

Corolario 2.2.3. *El plano tangente $T_p(S)$ es un espacio vectorial de dimensión 2.*

Dadas dos superficies S_1 y S_2, un mapa $f\colon S_1 \to S_2$, es *diferenciable* en un punto $p \in S_1$ si existen parametrizaciones $\phi\colon U \to S_1$, en torno de p, y $\psi\colon V \to S_2$, en torno de $f(p)$ tales que el mapa $\varphi = \psi^{-1} \circ f \circ \phi\colon U \to V$ es diferenciable. Si $f\colon S_1 \to S_2$ es diferenciable en $p \in S_1$, su diferencial en p es el mapa

$$df|_p\colon T_p(S_1) \to T_{f(p)}(S_2), \quad v \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \alpha(t)), \tag{2.2}$$

donde $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S_1$ satisface $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Ejercicio 2.2.4. 1. *Muestre que la noción de diferenciabilidad no depende de las parametrizaciones escogidas.*

2. *Muestre que $df|_p$ es un mapa lineal.*

Observación 6. *Dada una función f definida sobre una superficie S, y una parametrización $\phi\colon U \to S$, utilizaremos mucho el siguiente "abuso de notación", frecuente en la literatura, a saber: identificaremos f con $f \circ \phi$. Así, si (u, v) son las coordenadas en U, escribiremos $f(u, v)$ en lugar de $f(\phi(u, v))$. Lo que estamos haciendo es identificar U con $\phi(U)$, e interpretamos las coordenadas (u, v) como coordenadas en $\phi(U)$. Esto nos permite simplificar mucho la escritura a la hora de hacer cálculos.*

2.2.1 Primera forma fundamental

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, y $p \in S$. Como $T_p(S)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, podemos restringir el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para $T_p(S)$. Esto es: dados $v_1, v_2 \in T_p(S)$, el producto interno de v_1 y v_2 en $T_p(S)$ es

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle v_1, v_2 \rangle, \tag{2.3}$$

donde en el lado derecho tenemos el producto interno en $\mathbb{R}^3$, de los vectores v_1 y v_2 vistos en $\mathbb{R}^3$. Asociamos a este producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ la forma cuadrática

$$I_p\colon T_p(S) \to T_p(S); v \mapsto \langle v, v \rangle_p. \tag{2.4}$$

Esta forma cuadrática es conocida como la *primera forma fundamental* de S. Dado $p \in S$, sea $\phi\colon U \to S$ una parametrización en torno de p. Podemos suponer $0 \in U$, y sean (u, v) las coordenadas en U. Podemos obtener una base de $T_p(S)$ aplicando $d\phi|_0$ a una base de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, tomando la base canónica $\{e_1, e_2\}$, obtendremos la base $\{d\phi|_0(e_1), d\phi|_0(e_2)\}$. Calculemos estos vectores.

$$d\phi|_0(e_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi(te_1)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi(t, 0)) = \frac{\partial \phi}{\partial u}\Big|_0 = \phi_u|_0,$$

y analogamente, tendríamos $d\phi|_0(e_1) = \phi_v|_0$. Así, de la parametrización $\phi\colon U \to S$, en torno de $p \in S$, obtenemos la base $\{\phi_u, \phi_v\}$, donde, como es usual, omitimos el punto de evaluación de la derivada.

Observación 7. *Sea $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \phi(U) \subset S$ una curva con $\alpha(0) = p$. Entonces tenemos $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$, y por lo tanto:*

$$\alpha'(0) = u'\phi_u + v'\phi_v$$

.

Sea ahora un vector $w \in T_p(S)$, y $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces calculamos

$$\begin{aligned} I_p(w) = I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0)\rangle_p = \langle u'\phi_u + v'\phi_v, u'\phi_u + v'\phi_v\rangle_p \\ &= \langle \phi_u, \phi_u\rangle_p (u')^2 + 2\langle \phi_u, \phi_v\rangle_p u'v' + \langle \phi_v, \phi_v\rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Los números $E = E(0,0) = \langle \phi_u, \phi_u\rangle_p$, $F = F(0,0) = \langle \phi_u, \phi_v\rangle_p$ y $G = G(0,0) = \langle \phi_v, \phi_v\rangle_p$ se conocen como los coeficientes de la primera forma fundamental en p. Dejando variar p dentro de $\phi(U)$, obtenemos funciones $E(u,v)$, $F(u,v)$ y $G(u,v)$.

Ejemplo 2.2.5. *El cilindro recto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ tiene la parametrización*

$$\phi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v),$$

con $U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$. Calculando, obtenemos

$$\phi_u = (-\sin(u), \cos(u), 0), \quad \phi_v = (0, 0, 1).$$

Resulta entonces $E = 1$, $F = 0$, y $G = 1$.

Por otro lado, el plano $\{z = 0\}$ tiene la parametrización $\phi(u,v) = (u, v, 0)$, de donde resulta $\phi_u = (1, 0, 0)$ y $\phi_v = (0, 1, 0)$, y por lo tanto $E = 1$, $F = 0$, y $G = 1$.

El hecho de que el cilíndro y el plano tengan los mismos coeficientes para la primera forma fundamental tiene una importante interpretación geométrica, y está estrechamente ligada al hecho de que estas superficies tienen, localmente, la misma geometría intrínseca.

Ejercicio 2.2.6. *Muestre que $EF - G = |\phi_u \times \phi_v|^2$, y por lo tanto, nunca se anula.*

La primera forma fundamental nos permite estudiar longitud de arcos de curvas así como ángulo de intersección de curvas. Para la longitud, dada un curva $\alpha\colon (a,b) \to S \subset \mathbb{R}^3$, recordemos que su longitud de arco entre t_0 y t es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\tau)| d\tau,$$

considerando entonces la primera forma fundamental $I_\tau = I_{\alpha(\tau)}$, podemos escribir

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I(\alpha'(\tau))} d\tau.$$

El ángulo de intersección de dos curvas $\alpha, \beta\colon (a,b) \to S$ en un punto $t = t_0$ es definido como $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)||\beta'(t_0)|}. \tag{2.6}$$

En particular, el ángulo θ que forman las curvas coordenadas de una parametrización $\phi\colon U \to S$ es tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \phi_u, \phi_v \rangle}{|\phi_u||\phi_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \tag{2.7}$$

Se puede observar entonces que las curvas coordenadas son ortogonales si, y sólo si, $F = 0$. Decimos entonces que la parametrización es *ortogonal.* Las parametrizaciones del cilindro y del plano vistos en el ejemplo 2.2.5 son ejemplos de parametrizaciones ortogonales.

Ejercicio 2.2.7. *1. Exhiba una parametrización ortogonal de la esfera.*

2. Investigue si existen superficies que no admiten parametrización ortogonal.

2.2.2 Isometrías

Cuando estudiamos una estructura en matemáticas, uno de los aspectos fundamentales que nos interesa considerar al respecto son las “simetrías” de dicha estructura. En términos generales, las simetrías de una estructura son las transformaciones que preservan dicha estructura. Como ejemplos podemos considerar:

1. Conjuntos: Si A es un conjunto sin ninguna estructura adicional, sus simetrías son las biyecciones $f\colon A \to A$.

2. Grupos: Aquí, además del conjunto G, tenemos una operación binaria $*$, y las simetrías son los mapas biyectivos $f\colon G \to G$ que preservan la operación binaria, es decir: $f(a*b) = f(a) * f(b)$. A estos mapas se les llama *isomorfismos* de $(G, *)$.

3. Espacios vectoriales: Aquí tenemos un grupo conmutativo $(V, +)$ junto con una operación de multiplicación por elementos de un cuerpo K: $\cdot\colon \mathbb{K} \times V \to V; (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$. Las simetrías son entonces mapas $T\colon V \to V$ que respetan ambas operaciones, es decir: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$, y se llaman isomorfismos lineales.

4. Espacios vectoriales con producto interno: Aquí tenemos un espacio vectorial $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, con una estructura adicional dada por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon V \times V \to \mathbb{K}$. Las simetrías, además de preservar la estructura lineal subyacente, deben preservar el producto interno, es decir, deben ser isomorfismos lineales $T\colon V \to V$ que satisfagan $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$. Estos son los llamados *operadores ortogonales.*

Todos estos son ejemplos de simetrías *internas*, en el sentido de que el mapa va del conjunto dado en sí mismo. Podemos extender ligeramente la idea, y considerar dos *espacios* diferentes, digamos dos grupos $(G, *)$ y $(H, \bullet)$. Entonces un isomorfismo entre estos grupos es una biyección $f\colon G \to H$ tal que $f(a * b) = f(a) \bullet f(b)$. Si existe tal mapa, decimos que $(G, *)$ y $(H, \bullet)$ son *isomorfos*, y esto quiere decir que desde el punto de vista de la teoría de grupos, ellos son indistinguibles. Otro ejemplo que podemos considerar es cuando tenemos dos espacios vectoriales $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, *)$ sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. En este caso, un isomorfismo lineal es una biyección $T\colon V \to W$ tal que $T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha * T(u) \oplus \beta * T(v)$, y si tal mapa existe decimos que $(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, *)$ son isomorfos, y esto de nuevo significa que, desde el punto de vista del álgebra lineal, estos espacios vectoriales son indistinguibles. Por ejemplo, puede probarse que todo espacio vectorial V de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con su estructura usual. De hecho, elegir una base en V es precisamente establecer un isomorfismo $T\colon V \to \mathbb{R}^n$.

En el caso que estamos estudiando, sean $S, \overline{S} \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies regulares. Supongamos, como ejemplo, que S sea la esfera unitaria, y $\overline{S}$ sea un elipsoide arbitrario centrado en el origen. Entonces el mapa $f\colon \overline{S} \to S; p \mapsto \frac{p}{|p|}$ es un difeomorfismo (biyección diferenciable con inversa diferenciable). Esto muestra que desde el punto de vista de la geometría, los difeomorfismos no son las simetrías que necesitamos. Esto no es sorprendente, ya que los difeomorfismos sólo toman en cuanta el aspecto de diferenciabilidad, y sabemos que en las superficies debemos considerar alguna estructura adicional para poder "hacer geometría". Dicha estructura adicional es a primera forma fundamental. Es esta estructura la que nos permite definir nociones como "distancia", "ángulos" y "área". Por tal motivo, si queremos preservar todas esas nociones geométricas, debemos exigir que las simetrías preserven la primera forma fundamental. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Una *isometría* entre S y $\overline{S}$ es un difeomorfismo $f\colon S \to \overline{S}$ tal que, para todo $p \in S$, y para todo $w \in T_p(S)$, satisface:

$$I_p(w) = I_{f(p)}(df_p(w)). \tag{2.8}$$

Equivalentemente, en términos del producto interno:

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)}, \tag{2.9}$$

para todo $p \in S$ y par todo $w_1, w_2 \in T_p(S)$.

Ejercicio 2.2.8. *Verifique que estas condiciones son equivalentes. (Sugerencia: use la* identidad de polarización: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(|x + y|^2 - |x - y|^2)$.*)*

Ejercicio 2.2.9. *Dada una superficie regular S, defina el conjunto*

$$Iso(S) := \{f\colon S \to S;\ f \text{ es isometría}\}.$$

Muestre que este conjunto es un grupo conmutativo, con producto dado por composición de funciones.

La noción de isometría es muy restrictiva, y en general dos superficies no serán isométricas simplemente porque no son difeomorfas. Piense por ejemplo en el cilindro y el plano. La razón por la que estas superficies no pueden ser difeomorfas es porque son diferentes a un nivel aún más fundamental, a saber, el topológico. Intuitivamente, el cilindro tiene un agujero, mientras que el plano no. Aún así, si consideramos el cilindro menos una de sus generatrices, es intuitivo que podemos desenrollarlo sobre el plano, y que las nociones geométricas como distancia y ángulo son preservadas. Es decir, esencialmente la geometría *local* del cilindro y del plano es la misma. Esto nos lleva a la siguiente definición, que será de mayor utilidad para nosotros.

Dadas unas superficies $S, \overline{S} \subset \mathbb{R}^3$, y $p \in S$, una *isometría local* en p es un mapa

$$\varphi \colon V \subset S \to \overline{S},$$

definida en un entorno $V \ni p$ tal que $\varphi \colon V \to \overline{V} = \varphi(V) \subset \overline{S}$ es una isometría. Si para cada $p \in S$ existe una isometría local en p, decimos que S es *localmente isométrico* a $\overline{S}$.

Ejemplo 2.2.10. *Veamos el ejemplo del plano y del cilindro con el rigor apropiado. Sea* $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ *y* $\overline{S} = \{(x, y, z); z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. *Consideremos las parametrizaciones*

$$\phi \colon U \to S; (u, v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v),$$

y

$$\psi \colon U \to \overline{S}; (u, v) \mapsto (u, v, 0).$$

Entonces el mapa $\varphi := \psi \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \subset S \to \psi(U) \subset \overline{S}$ *es una isometría local en* q*, cualquiera sea* $q \in \phi(U)$*. En efecto, sea* $w \in T_q(S)$*, entonces tenemos*

$$w = \phi_u u' + \phi_v v' \Rightarrow I_q(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \tag{2.10}$$

Por otro lado, poniendo $p \in U$ *tal que* $\phi(p) = q$*, y* $\tilde{w} \in T_p(U)$ *tal que* $d\phi_p(\tilde{w}) = w$*, obtenemos*

$$d\varphi_q(w) = d\psi_p(\tilde{w}) = \psi_u u' + \psi_v v' \Rightarrow I_{\varphi(q)}(d\varphi_q(w)) = \overline{E}(u')^2 + 2\overline{F}u'v' + \overline{G}(v')^2. \tag{2.11}$$

Como $E = \overline{E}$*,* $F = \overline{F}$ *y* $G = \overline{G}$*, de las ecuaciones 2.10 y 2.11 concluimos que*

$$I_q(w) = I_{\varphi(q)}(d\varphi_q(w)),$$

y por tanto S *es localmente isométrico a* $\overline{S}$*.*

Observación 8. *Note que en el ejemplo no usamos la forma explícita de las parametrizaciones, sino apenas la igualdad de los coeficientes de la primera forma fundamental, es decir:* $E = \overline{E}$*,* $F = \overline{F}$ *y* $G = \overline{G}$*. Así, en realidad hemos establecido el siguiente resultado.*

Proposición 2.2.11. *Sean* S *y* $\overline{S}$ *dos superficies regulares para las cuales existen parametrizaziones* $\phi \colon U \to S$ *y* $\psi \colon U \to \overline{S}$ *tales que* $E = \overline{E}$*,* $F = \overline{F}$ *y* $G = \overline{G}$*. Entonces* $\varphi := \psi \circ \phi^{-1} \colon \phi(U) \to \psi(U)$

es una isometría local.

Observación 9. *La noción de isometría local no es simétrica. Esto es, puede darse el caso de dos superficies S y $\overline{S}$ tal que S es localmente isométrico a $\overline{S}$, pero $\overline{S}$ no es localmente isométrico a S. Un ejemplo puede verse en la proyección $p\colon S^2 \to P^2(\mathbb{R})$, donde $P^2(\mathbb{R})$ es el plano proyectivo.*

2.3 Aplicación de Gauss

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $\phi\colon U \to S$ una parametrización. En cada punto $q \in \phi(U)$ podemos definir un *vector normal unitario* a S, mediante la fórmula

$$N(q) := \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}(q). \tag{2.12}$$

Observación 10. *Listemos algunas observaciones sobre esta definición*

1. *Note que $N(q)$ es normal al plano tangente $T_q(S)$.*

2. *La ecuación 2.12 define la normal unitaria en $\phi(U) \subset S$. Es un hecho interesante que no toda superficie admite una normal unitaria definida globalmente y que sea continua. Un ejemplo de tales superficies es la banda de Moebius.*

3. *Si una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ admite una normal unitaria global continua, decimos que S es orientable. Ejemplos de superficies orientables son aquellas que son cubiertas por una única parametrización, así como las definidas como imagen inversa de valores regulares. En adelante, vamos a considerar que las superficies son orientables, a menos que se indique lo contrario.*

Dada una superficie orientable $S \subset \mathbb{R}^3$, la ecuación 2.12 define una normal unitaria global $N\colon S \to \mathbb{R}^3$. Como $N(q)$ es unitaria, tenemos de hecho

$$N\colon S \to S^2, \tag{2.13}$$

donde $S^2 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3), x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Este mapa se conoce como la *aplicación (o mapa) de Gauss*.

El mapa de Gauss es diferenciable, y tenemos

$$dN_p\colon T_p(S) \to T_{N(p)}(S^2).$$

Como $T_{N(p)}(S^2) = \{N(p)\}^{\perp} = T_p(S)$, podemos considerar

$$dN_p\colon T_p(S) \to T_p(S) \tag{2.14}$$

Ejercicio 2.3.1. *Dado* $v \in T_p(S)$*, sea* $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ *tal que* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = v$*. Sea* $N(t) := N(\alpha(t))$*. Si* $\phi\colon U \to S$ *es una parametrización en torno de* p*, muestre que*

$$dN_p(v) = N'(0) = N_u u' + N_v v'.$$

Concluya que $dN_p(\phi_u) = N_u$ *y* $dN_p(\phi_v) = N_v$*.*

Ejemplo 2.3.2. *Veamos algunos ejemplos concretos.*

1. *En el plano* $ax + by + cz + d = 0$*, el vector normal unitario es*

$$N = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}},$$

que siendo constante, nos da $dN_p = 0$*, para cualquier* p*.*

2. *Sea* $S = S^2$*. Entonces si* $v = (x, y, z) \in S$*, tenemos* v *unitario y* v *normal a* S *(Verifique!). Resulta entonces* $N\colon S = S^2 \to S^2; v \mapsto v$*, y por tanto* $dN_p = I$*.*

3. *Sea* $S = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3); x^2 + y^2 = 1\}$*. La normal unitaria es dada por* $N(x, y, z) = (x, y, 0)$*. Sea* $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$*, es decir* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *con* $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$*. Entonces* $N(t) = (x(t), y(t), 0)$*, y resulta*

$$N'(t) = (x'(t), y'(t), 0).$$

Si $v \in T_p(S)$ *es paralelo al eje* z*, entonces* $dN_p(v) = 0$*. Si* $w \in T_p(S)$ *es paralelo al plano* $\{z = 0\}$*, entonces* $dN_p(w) = w$*. Concluimos que* v *y* w *son autovectores de* dN_p*, con autovalores* 0 *y* 1*.*

2.3.1 Segunda forma fundamental

Procederemos estudiar en más detalle el diferencial del mapa de Gauss. A partir de dicho estudio, podremos introducir algunos conceptos geométricos que nos llevarán a las nociones de curvatura. Comencemos con el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3. *El diferencial del mapa de Gauss*

$$dN_p\colon T_p(S) \to T_p(S)$$

es autoadjunto.

Prueba. Basta mostrar que $\langle dN_p(w_1), w_2\rangle = \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(S)$. Tomamos entonces una parametrización $\phi\colon U \to S$ en torno de p y consideramos la base $\{\phi_u, \phi_v\}$. Del Ejercicio 2.3.1, sabemos que $dN_p(\phi_u) = N_u$ y $dN_p(\phi_v) = N_v$, entonces basta mostrar que

$$\langle N_u, \phi_v\rangle = \langle \phi_u, N_v\rangle.$$

Para establecer esta igualdad, derivamos $\langle N, \phi_u \rangle = 0$ respecto de v, y $\langle N, \phi_v \rangle = 0$ respecto de u:

$$0 = \langle N, \phi_u \rangle_v = \langle N_v, \phi_u \rangle + \langle N, \phi_{uv} \rangle \tag{2.15}$$

$$0 = \langle N, \phi_v \rangle_u = \langle N_u, \phi_v \rangle + \langle N, \phi_{vu} \rangle. \tag{2.16}$$

De donde obtenemos $\langle N_u, \phi_v \rangle = \langle \phi_u, N_v \rangle$, como queríamos. □

Dado que $dN_p \colon T_p(S) \to T_p(S)$ es autoadjunto, podemos asociarle una forma cuadrática en $T_p(S)$:

$$\pi_p(v) := -\langle dN_p(v), v \rangle. \tag{2.17}$$

Esta forma cuadrática se conoce como la *segunda forma fundamental*.

Observación 11 (Segunda forma vs Primera forma - Interpretación geométrica)**.** *Del Ejemplo 2.3.2, podemos concluir que la segunda forma fundamental del cilindro y del plano no son iguales, aunque sí lo eran sus primeras formas fundamentales. Por detrás de esto está el hecho de que la primera forma fundamental nos habla de la geometría intrínseca de la superficie, sin importar cómo está "colocada" dentro de $\mathbb{R}^3$. Por su parte, la segunda forma fundamental nos da información de cómo está "colocada" la superficie dentro de $\mathbb{R}^3$. Para ver eso, observamos que dN_p da información de cómo varía la dirección de la normal entorno de p a lo largo de curvas que pasan por p. Intuitivamente vemos que esa variación de la normal nos dice cómo es la "forma" de la superficie en las cercanías del punto p. Por esta razón, a la segunda forma fundamental se la conoce también como* operador de forma.

2.3.2 Expresión en coordenadas locales

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una regular orientable, y $\phi \colon UtoS$ una parametrización. Sabemos que en $\phi(U)$ tenemos la normal unitaria dada por

$$N = \frac{\phi_u \times \phi_v}{|\phi_u \times \phi_v|}.$$

Recordemos del Ejercicio 2.3.1 que, si $p + \phi(0)$ y $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t))$ es una curva con $\alpha(0) = p$, entonces:

$$dN_p(\alpha'(0)) = N_u u + N_v v',$$

donde $N_u = dN_p(\phi_u)$ y $N_v = dN_p(\phi_v)$, y $\alpha'(0) = (u', v')$ en la base $\{\phi_u, \phi_v\}$. Por tanto, podemos escribir

$$N_u = a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v, \tag{2.18}$$

$$N_v = a_{12}\phi_u + a_{22}\phi_v, \tag{2.19}$$

de donde cocluimos que

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= (a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v)u' + (a_{12}\phi_u + a_{22}\phi_v)v' \\ \Rightarrow dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Recordemos que los coeficientes de la primera forma fundamental son $E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle$, $F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle$ y $G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle$, e introduzcamos la siguiente notación: $e = -\langle N_u, \phi_u \rangle$, $f = -\langle N_u, \phi_v \rangle = -\langle N_v, \phi_u \rangle$, $g = -\langle N_v, \phi_v \rangle$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, \phi_v \rangle = \langle a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v, \phi_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, \phi_u \rangle = \langle a_{12}\phi_u + a_{22}\phi_v, \phi_v \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -e &= \langle N_u, \phi_u \rangle = \langle a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v, \phi_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -g &= \langle N_v, \phi_v \rangle = \langle a_{12}\phi_v + a_{22}\phi_v, \phi_v \rangle = a_{12}F + a_{21}G, \end{aligned} \tag{2.21}$$

que matricialmente puede escribirse como

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

de donde finalmente obtenemos la matriz de dN_p en la base $\{\phi_u, \phi_v\}$ como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}. \tag{2.22}$$

Ejercicio 2.3.4. *Muestre que en la parametrización $\phi \colon U \to S$, vale la expresión*

$$\pi_p(\alpha'(0)) = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2, \tag{2.23}$$

donde $\alpha'(0) = (u', v')$ en la base $\{\phi_u, \phi_v\}$.

2.4 Curvaturas

Tenemos ahora todos los ingredientes para hablar de las nociones de curvaturas en una superficie. Entre las distintas nociones que veremos, la llamada curvatura de Gauss es de fundamental importancia, y es una de las piedras angulares de la geometría diferencial moderna.

2.4.1 Curvatura normal y curvaturas principales

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular, y $\alpha \colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva regular. Supongamos que $\alpha(0) = \phi(0) = p$, y sean κ y η la curvatura y la normal de α en p, vista como curva en $\mathbb{R}^3$.

Consideremos también N, la normal a la superficie N en p, y sea θ el ángulo entre η y N, es decir:

$$\cos(\theta) = \langle \eta, N \rangle.$$

El número $K_n(p) := \kappa \cos(\theta)$ se llama *curvatura normal* de α en p.

INSERTAR FIGURA.

Supogamos que α está parametrizada por longitud de arco s, y sea $N(s)$ la restricción de la normal N a la curva $\alpha(s)$, resulta entonces $\langle N(s), \alpha'(s) = 0$, que derivando nos da

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Evaluando esta igualdad en $s = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_p(\alpha'(0)) &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N, \kappa\eta \rangle \rangle = \kappa \langle N, \eta \rangle \rangle \\ &= \kappa \cos(\theta) = K_n(p). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hemos probado asi el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1 (Meusnier)**.** *Todas las curvas en S con la misma recta tangente en $p \in S$, y parametrizadas por longitud de arco, tienen la misma curvatura normal en p, igual al valor de la segunda forma fundamental evaluada en el vector tangente común a dichas curvas en p.*

El teorema de Meusnier nos permite hablar de la curvatura normal a lo largo un vector $v \in T_p(S)$, $K_n(p, v)$. Dado un vector $v \in T_p(S)$ llamamos *sección normal* (de S en p, a lo largo de v) a la intersección de S con el plano generado por los vectores $N(p)$ y v. En un entorno suficientemente pequeño de p esta sección es una curva regular, con vector normal η paralelo a $N(p)$, o nulo, y por lo tanto su curvatura normal en p es, en módulo, igual a su curvatura en p.

Ejemplo 2.4.2 (Curvatura normal)**.** *Veamos algunos casos particulares donde podemos visualisar y evitar muchos cálculos.*

1. *En el plano, todas las secciones normales son rectas. Luego las curvaturas normales son todas nulas, y por tanto la segunda forma fundamental es nula.*

2. *En la esfera S^2 todas las secciones normales son círculos máximos, y así las curvaturas normales son tadas iguales a* 1. *Sigue que $\pi_p(v) = 1$ para todo $p \in S^2$ y para todo $v \in T_p(S^2)$.*

3. *En el cilindro $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1\}$, las secciones normales varían desde rectas (paralelas al eje z), pasando por elipses hasta llegar a círculos (paralelos al plano $x - y$). Así, las curvaturas normales varían desde* 0 *hasta* 1. *Y tenemos $\pi_p(v) = 0$ si v es paralelo al eje z, mientras que $\pi_p(v) = 1$ si v es paralelo al plano x_y. Para cualquier otro vector, tenemos $0 < \pi_p(v) < 1$.*

Recordemos del álgebra lineal que, siendo dN_p autoadjunto, existe una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p(S)$ compuesta por autovectores de dN_p. Esto implica que en dicha base, la matriz de dN_p es diagonal, con sus autovalores en la diagonal. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} dN_p(e_1) &= -k_1 e_1 \\ dN_p(e_2) &= -k_2 e_2 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Observación 12. *Los signos son simplemente una convención. Así mismo, asumimos $k_1 \geq k_2$.*

Ejercicio 2.4.3. *Muestre que k_1 y k_2 son el máximo y el mínimo de π_p restricto a los vectores $v \in T_p(S)$ con $|v| = 1$.*

Llamamos a los números k_1 y k_2 las *curvaturas principales* de S en p. Y a las direcciones definidas por e_1 y e_2, *direcciones principales* en p.

Ejemplo 2.4.4 (Direcciones y curvaturas principales)**.** *Veamos estos conceptos en los casos particulares donde no necesitamos hacer cálculos.*

1. *En el plano y en la esfera, todas las direcciones son principales.*

2. *En el cilindro $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1\}$ las direcciones principales son: las paralelas al eje z, con curvatura principal $k_2 = 0$, y las paralelas al plano $x - y$, con curvatura principal $k_1 = 1$.*

Conociendo las curvaturas principales, podemos cacular la curvatura normal a lo largo de cualquier dirección. En efecto, sea $v \in T_p(S)$, entonces, escriviendo $v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} K_n(p, v) = \pi_p(v) &= -\langle dN_p(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2), \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2\rangle = \\ &= -\langle -\cos(\theta)k_1e_1 - \sin(\theta)k_2e_2), \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2\rangle \\ &= k_1\cos^2(\theta_1) + k_2\sin^2(\theta). \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4.2 Curvatura de Gauss y curvatura media

Dada una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$, en cada punto $p \in S$ tenemos un par de invariantes numéricos asociados al mapa dN_p, esto es, no dependen de la base escogida en $T_p(S)$ para calcularlos. Estos valores son el determinante $\det(dN_p)$ y la traza $\operatorname{tr}(dN_p)$. Si elegimos la base ortonormal que diagonaliza dN_p, vemos que estas cantidades están dadas por

$$\begin{aligned} \det(dN_p) &= (-k_1)(-k_2) = k_1k_2, \\ \operatorname{tr}(dN_p) &= -(k_1 + k_2). \end{aligned} \tag{2.27}$$

El número $H_p := -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(dN_p) = \frac{k_1+k_2}{2}$ es la *curvatura media* de S en p, y el número $K(p) := \det(dN_p) = k_1k_2$ es la *curvatura de Gauss* de S en p.

De la ecuación 2.22, podemos concluir que, dada una parametrización $\phi\colon U \to S$, la curvatura de Gauss puede expresarse como

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \tag{2.28}$$

Ejercicio 2.4.5. *Establezca la fórmula 2.28.*

La curvatura media sirve para definir la noción de superficies mínimas, que es un concepto de gran importancia en distintas áreas. Por ejemplo, aparecen como soluciones para la superficie del horizonde de eventos de un agujero negro, y son fundamentales en la ingeniería de estructuras tensadas.

Por su parte, la curvatura de Gauss es la piedra angular sobre la cual se construye la geometría Riemanniana y semi-Riemanniana, que son de fundamental importancia para la teoría de la relatividad general, así como para la mecánica y muchas otras areas de la ingeniería.

2.5 Teorema de Gauss (Egregium)

En esta sección mostraremos un resultado fundamental de la teoría de superficies. Este resultado, probado por Gauss, y denominado por él como "Teorema Egregium", establece que la noción de curvatura de Gauss, si bien definida en términos de la segunda forma fundamental (es decir, considerando cómo la superficie está colocada dentro de $\mathbb{R}^3$), en realidad depende sólo de la primera forma fundamental, y por tanto es una noción intrínseca (es decir, tiene sentido y puede ser estudiada sin ninguna mención de la forma en que al superficie está colocada en $\mathbb{R}^3$, más aún, tiene sentido para superficies definidas de forma intrínseca, es decir, sin apelo a un espacio ambiente.)

2.5.1 Símbolos de Christoffel

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable, y $\phi\colon U \to S$ una parametrización. En dicha parametrizacón podemos considerar el triedro $\{\phi_u, \phi_v, N\}$, siendo N la aplicación de Gauss.

Por analogía a nuestro trabajo con las curvas, en que expresamos las derivadas del vector tangente, de la normal y de la binormal en el triedro de Frenet-Serret, nos proponemos ahora expresar las derivadas de ϕ_u, ϕ_v y N en el triedro $\{\phi_u, \phi_v, N\}$. Calculamos entonces:

$$
\begin{aligned}
\phi_{uu} &= \Gamma^1_{11}\phi_u + \Gamma^2_{11}\phi_v + L_1 N,\\
\phi_{uv} &= \Gamma^1_{12}\phi_u + \Gamma^2_{12}\phi_v + L_2 N,\\
\phi_{vv} &= \Gamma^2_{22}\phi_u + \Gamma^2_{22}\phi_v + L_3 N,\\
\phi_{vu} &= \Gamma^1_{21}\phi_u + \Gamma^2_{21}\phi_v + L_4 N,\\
N_u &= a_{11}\phi_u + a_{12}\phi_v,\\
N_v &= a_{21}\phi_u + a_{22}\phi_v.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

donde los Γ^r_{ij} son conocidos como *símbolos de Christoffel.*

Podemos hacer unas primeras observaciones sobre estas ecuaciones. Primero, de $\phi_{uv} = \phi_{vu}$, resulta $\Gamma^r_{ij} = \Gamma^r_{ji}$ y $L_2 = L_4$. Además, tenemos

$$
\begin{aligned}
&e := -\langle N_u, \phi_u\rangle = \langle N, \phi_{uu}\rangle = L_1\\
&f := -\langle N_u, \phi_v\rangle = -\langle N_v, \phi_u\rangle = \langle N, \phi_{uv}\rangle = L_2 = L_4\\
&g := -\langle N_v, \phi_v\rangle = \langle N, \phi_{vv}\rangle = L_3
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Tomando el producto interno de las primeras 3 ecuaciones de 2.29 con ϕ_u y ϕ_v, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{cases}
\Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F = \langle \phi_u, \phi_v\rangle = \dfrac{1}{2}E_u\\
\Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G = \langle \phi_{uu}, \phi_v\rangle = F_u - \dfrac{1}{2}E_v
\end{cases}
\tag{2.31}
$$

$$
\begin{cases}
\Gamma^1_{12}E + \Gamma^2_{12}F = \langle \phi_{uv}, \phi_u\rangle = \dfrac{1}{2}E_v\\
\Gamma^1_{12}F + \Gamma^2_{12}G = \langle \phi_{uv}, \phi_v\rangle = \dfrac{1}{2}G_u
\end{cases}
\tag{2.32}
$$

$$
\begin{cases}
\Gamma^1_{22}E + \Gamma^2_{22}F = \langle \phi_{vv}, \phi_u\rangle = F_v - \dfrac{1}{2}G_u\\
\Gamma^1_{22}F + \Gamma^2_{22}G = \langle \phi_{vv}, \phi_v\rangle = \dfrac{1}{2}G_v
\end{cases}
\tag{2.33}
$$

En cada par de ecuaciones, vemos que el determinante de la matriz de coeficientes es

$$
EG - F^2 = |\phi_u \times \phi_v|^2 \neq 0,
\tag{2.34}
$$

y por lo tanto cada par consituye un sistema con solución única. Asi obtenemos los símbolos de Christoffel en función de E, F, G, y de sus derivadas.

2.5.2 Teorema "Egregium" de Gauss

A fin de proseguir con los cálculos necesarios para probar el teorema de Gauss, introduciremos una notación ligeramente más general que la que venimos usando. Para ello, si $\phi\colon U \to S$ es una parametrización, dejaremos que los índices $i, j, k \in \{1, 2\}$ representen a las coordenadas u y v, dependiendo de si toman el valor 1 o 2. Así, la notación $\partial_i = \frac{\partial}{\partial_i}$ indicará la derivada respecto de u si $i = 1$ y respecto de v si $i = 2$. Del mismo modo, $\partial_{jk} = \frac{\partial^2}{\partial_j \partial_k}$ indicará la correspondiente segunda derivada. Las ecuaciones 2.29 pueden escribirse entonces de forma más concisa como:

$$\begin{aligned} \partial_{jk}\phi &= \Gamma^1_{jk}\phi_u + \Gamma^2_{jk}\phi_v + h_{jk}N \\ \partial_i N &= a_{1i}\phi_u + a_{2i}\phi_v \end{aligned} \tag{2.35}$$

Derivando de nuevo la primera de estas ecuaciones, obtendremos

$$\partial_i(\partial_{jk}\phi) = A^1_{ijk}\phi_u + A^2_{ijk}\phi_v + B_{ijk}N. \tag{2.36}$$

Observación 13. *Observemos que los coeficientes A^r_{ijk} y B_{ijk} son simétricos en los indices i, j, k.*

A continuación hacemos los cálculos para obtener los coeficientes A^r_{ijk} en términos de los símbolos de Christoffel y de sus derivadas.

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_{jk}\phi) &= \partial_i(\Gamma^1_{jk}\phi_u + \Gamma^2_{jk}\phi_v + h_{jk}N) \\ &= \partial_i\Gamma^1_{jk}\phi_u + \Gamma^1_{jk}\partial_i\phi_u + \partial_i\Gamma^2_{jk}\phi_v + \Gamma^2_{jk}\partial_i\phi_v + \partial_i h_{jk}N + h_{jk}\partial_i N \\ &= \partial_i\Gamma^1_{jk}\phi_u + \Gamma^1_{jk}(\Gamma^1_{i1}\phi_u + \Gamma^2_{i1}\phi_v + h_{i1}N) \\ &+ \partial_i\Gamma^2_{jk}\phi_v + \Gamma^2_{jk}(\Gamma^1_{i2}\phi_u + \Gamma^2_{i2}\phi_v + h_{i2}N) \\ &+ \partial_i h_{jk}N + h_{jk}(a_{1i}\phi_u + a_{2i}\phi_v) \\ &= (\partial_i\Gamma^1_{jk} + \Gamma^1_{jk}\Gamma^1_{i1} + \Gamma^2_{jk}\Gamma^1_{i2} + h_{jk}a_{1i})\phi_u \\ &+ (\partial_i\Gamma^2_{jk} + \Gamma^1_{jk}\Gamma^2_{i1} + \Gamma^2_{jk}\Gamma^2_{i2} + h_{jk}a_{2i})\phi_v \\ &+ (\Gamma^1_{jk}h_{i1} + \Gamma^2_{jk}h_{i2} + \partial_i h_{jk})N. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por la unicidad de la expresión en una base, concluimos que:

$$A^r_{ijk} = \partial_i\Gamma^r_{jk} + \Gamma^1_{jk}\Gamma^r_{i1} + \Gamma^2_{jk}\Gamma^r_{i2} + h_{jk}a_{ri}. \tag{2.38}$$

De las simetrías de A^r_{ijk}, resulta $A^r_{ijk} - A^r_{jik} = 0$, y por tanto:

$$\begin{aligned} &0 = \partial_i\Gamma^r_{jk} - \partial_j\Gamma^r_{ik} + \Gamma^1_{jk}\Gamma^r_{i1} - \Gamma^1_{ik}\Gamma^r_{j1} + \Gamma^2_{jk}\Gamma^r_{i2} - \Gamma^2_{ik}\Gamma^r_{j2} + h_{jk}a_{ri} - h_{ik}a_{rj} \\ &\Rightarrow \partial_i\Gamma^r_{jk} - \partial_j\Gamma^r_{ik} + \sum_{s=1}^{2}(\Gamma^s_{jk}\Gamma^r_{is} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{js}) = h_{ik}a_{rj} - h_{jk}a_{ri}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Haciendo $i = r = 1$ y $j = k = 2$, obtenemos:

$$\partial_u\Gamma^1_{22} - \partial_v\Gamma^1_{12} + \sum_{s=1}^{2}(\Gamma^s_{22}\Gamma^1_{1s} - \Gamma^s_{12}\Gamma^1_{2s}) = fa_{12} - ga_{11}. \tag{2.40}$$

De la expresión matricial de la segunda forma fundamental, obtenemos que

$$fa_{12} - ga_{11} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}G. \tag{2.41}$$

Finalmente, concluímos el teorema Egregium de Gaus:

$$K = \frac{1}{G}\left(\partial_u \Gamma^1_{22} - \partial_v \Gamma^1_{12} + \sum_{s=1}^{2}(\Gamma^s_{22}\Gamma^1_{1s} - \Gamma^s_{12}\Gamma^1_{2s})\right). \tag{2.42}$$

Observación 14. *Este resultado establece que la curvatura de Gauss, que fue definida como el determinante de la segunda forma fundamental, en realidad depende sólo de la primera forma fundamental (y de las derivadas de hasta segundo orden de la misa). Una consecuencia de este resultado es que la curvatura de Gauss es un invariante isométrico local, es decir, dos superficies localmente isométricos deben tener la misma curvatura de Gauss en puntos correspondientes. Esa es la razón por la cual ningún mapa cartográfico del globo terraqueo puede ser isométrico, es decir, necesariamente deben distorsionar, ya que la Tierra, modelada como una esfera, tiene curvatura de Gauss $K = 1$, mientras que el plano, donde representamos nuestros mapas, tiene curvatura de Gauss $K = 0$, y por tanto, estas superficies no pueden ser ni siquiera localmente isométricos.*

2.5.3 Lista de problemas a ser entregada

A continuación indicamos algunos de los ejercicios dispersos por el texto que deberán entregar resueltos en pdf para poder ser evaluados, en caso de que quieran optar a un certificado de aprobación.

1. Ejercicio 2 de final del capítulo 1.
2. Ítems 1 y 2 del Ejercicio 2.1.1.
3. Ejercicio 2.2.1..
4. Ejercicio 2.2.4.
5. Ejercicio 2.2.6.
6. Ejercicio 2.2.8.
7. Ejercicio 2.2.9.
8. Ejercicio 2.4.5.

Bibliografía