Capítulo 1

Introducción

En este curso, estudiaremos algunas nociones de Análisis (convergencia, continuidad) en el contexto de los números reales $\mathbb{R}$.

Asumiremos familiaridad con los números **racionales** $\mathbb{Q}$ (i.e. números de la forma m/n, donde m y n son enteros, $n \neq 0$)

El sistema de los números racionales es inadecuado para algunos propósitos, por ejemplo, no existe racional p, tal que $p^2 = 2$.

Esto lleva a la introducción de los llamados números **irracionales**, que son generalmente representados por su expansión decimal infinita y se consideran *aproximados* por las expansiones decimales finitas. La secuencia

$$1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, 1{,}4142, \ldots$$

tiende a $\sqrt{2}$, en algún sentido que será definido más adelante.

Ejemplo 1.1. Veamos que la equación

$$p^2 = 2 \tag{1.1}$$

no es satisfecha por ningún racional p. Si existe tal p podríamos escribir $p = m/n$, con m y n no ambos pares. Esto implicaría que

$$m^2 = 2n^2. \tag{1.2}$$

Esto prueba que m^2 es par. Luego m es par (si m fuese impar, m^2 tambien sería impar), luego m^2 es divisible por 4. Sigue que el lado derecho de (1.2) es divisible por 4, y por tanto, n^2 es divisible por 2. Sigue que n es par.

Examinemos este ejemplo un poco más de cerca. Sea A el conjunto de todos los racionales positivos p, tales que $p^2 < 2$ y sea B el conjunto de todos los racionales positivos p, tales que $p^2 > 2$. Mostraremos que A no contiene un elemento **mayor** y B no contiene un elemento **menor**.

Más precisamente, para todo p en A podemos encontrar un q en A, tal que $p < q$.

Para ver esto, asociemos a cada racional $p > 0$, el número

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p - 2}{p + 2}. \tag{1.3}$$

Luego,

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \tag{1.4}$$

Claramente q es racional y si p está en A, entonces, q está en A y $p < q$. Análogamente, si p está en B, entonces, q está en B y $q < p$.

El propósito de la discusión anterior ha sido mostrar que el conjunto de los números racionales posee ciertos *agujeros*, a pesar del hecho de que entre dos números racionales, siempre existe otro (por ejemplo: si $r < s$, $r < \frac{r+s}{2} < s$). El sistema de números reales rellena estos *agujeros*. Esta es la razón fundamental de su importancia en el Análisis.

Definición 1.1. Si A es un conjunto (cuyos elementos son números o cualquier otro tipo de objetos), escribimos $x \in A$ para indicar que x es un elemento de A (o que x pertenece a A).

Si x no es un elemento de A, escribimos $x \notin A$.

Llamaremos conjunto **vacío** al conjunto que no posee ningún elemento. Si un conjunto posee al menos un elemento, decimos que es **no-vacío**.

Si A y B son conjuntos, y todo elemento de A es un elemento de B, decimos que A es un subconjunto de B y escribimos $A \subset B$. Si además, existe un elemeto de B que no está en A, decimos que A es un subconjunto propio de B. Note que $A \subset A$ para todo conjunto A.

Si $A \subset B$ y $B \subset A$ escribimos $A = B$. Caso contrario $A \notin B$.

1.1. Conjuntos ordenados

Definición 1.2. Sea S un conjunto. Un **orden** en S es una ralación, denotada por $<$, con las siguientes dos propiedades

- Si $x, y \in S$, una y solo una de las siguientes relaciones

$$x < y, y < x, x = y \tag{1.5}$$

  es verdadera.

- Dados $x, y, z \in S$, si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < y$.

La expresion "$x < y$" es leída como "x es menor que y".

A veces, es más conveniente utilizar la expresión $y > x$ en vez de $x < y$.

La notación $x \leq y$ indica que $x < y$ o $x = y$, sin especificar cual de las dos relaciones es verdadera. En otras palabras, $x \leq y$ es la negación de $x > y$.

Definición 1.3. Un **conjunto ordenado**, es un conjunto S, donde existe un orden definido.

Ejemplo 1.2. Podemos definir un orden en el conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$$

diciendo que dados $m, n \in \mathbb{N}$

$$m < n \iff \text{existe } p \in \mathbb{N} : m + p = n.$$

Definición 1.4. Supongamos que S es un conjunto ordenado y $E \subset S$. Supongamos que existe $\beta \in S$, tal que para todo $x \in E$, se tiene que $x \leq \beta$. En este caso decimos que E es **acotado superiormente** y que β es una **cota superior** de E

Cotas inferiores se definen de manera análoga.

Definición 1.5. Supongamos que S es un conjunto ordenado, $E \subset S$ y E es acotado superiormente. Supongamos que existe $\alpha \in S$, con las siguientes propiedades:

- α es una cota superior de E

- Si $\gamma < \alpha$, entonces γ no es una cota superior de E.

En este caso decimos que α es la **menor cota superior** de E, o el **supremo** de E, y escribimos

$$\alpha = \sup E \tag{1.6}$$

La mayor cota inferior, o **ínfimo**, de un conjunto E acotado inferiormente, se define de la misma manera: La expresión

$$\alpha = \inf E \tag{1.7}$$

indica que α es una cota inferior de E y que para todo $\gamma > \alpha$, γ no es una cota inferior de E.

Ejemplo 1.3. Podemos definir un orden en los racionales $\mathbb{Q}$, estipulando que, para todo $p, q \in \mathbb{Q}$

$$p < q \iff q - p \text{ es positivo.}$$

En este caso, el conjunto A del Ejemplo 1.1, es acotado superiormente. De hecho, el conjunto de las cotas superiores de A son los elementos de B. Ya que B no contiene menor elemento, A no posee supremo en $\mathbb{Q}$.

Observación 1.1. Si $a = \sup E$, entonces a puede o no pertenecer al conjunto E. Por ejemplo, si E_1 es el conjunto de todos los $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < 0$ y E_2, el conjunto de todos los $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \leq 0$, entonces

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0 \tag{1.8}$$

y $0 \in E_2$,$0 \notin E_1$.

Ejemplo 1.4. Considere el conjunto $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$. En este caso $\sup E = 1$, que pertenece a E y $\inf E = 0$, que no pertenece a E.

Definición 1.6. Decimos que un conjunto ordenado S posee la **propiedad del supremo** si, para todo subconjunto $E \subset S$, no-vacío, acotado superiormente, existe un elemento $\alpha \in S$, tal que $\sup E = \alpha$.

El Ejemplo 1.3 muestra que el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ no posee la propiedad del supremo.

Ejercicio 1.1. Suponga que el conjunto ordenado S posee la propiedad del supremo. Muestre que S tambien posee la **propiedad del infimo**: dado un subconjunto $B \subset S$, no-vacio, acotado inferiormente, considere el conjunto L de las cotas inferiores de B.

- Provar que L es acotado superiormente.
- Provar que existe $\beta \in S$, tal que $\beta = \inf B$.

1.2. Cuerpos

Definición 1.7. Un **cuerpo**, es un conjunto F, munido de dos operaciones llamadas **adición** y **multiplicación**, que satisfacen las siguientes propiedades, llamadas **axiomas de cuerpo**:

- Para todo $x, y \in F$, su *suma* $x + y$ y su *producto* $x \cdot y$ pertenecen a F.
- Conmutatividad: $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in F$.
- Asociatividad: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in F$.
- F contiene un elemento 0, tal que $0 + x = x$ para todo $x \in F$.
- F contiene un elemento $1 \neq 0$, tal que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in F$.
- Para todo $x \in F$, existe un elemento en F, denotado por $-x$, que satisface $x + (-x) = 0$.
- Para todo $x \in F$, $x \neq 0$, existe un elemento en F, denotado por $1/x$, que satisface $x \cdot (1/x) = 1$.
- Distributividad: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para todo $x, y, z \in F$.

Observación 1.2. Generalmente, por conveniencia, escribiremos

$$xy, x - y, \frac{x}{y}, x + y + z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x$$

en vez de

$$x \cdot y, x + (-y), x \cdot (1/y), (x + y) + z, (x \cdot y) \cdot z, x \cdot x, x \cdot x \cdot x, x + x, x + x + x.$$

Observación 1.3. Los axiomas de cuerpo son satisfechas por los racionales, con las definiciones usuales de suma y producto. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ es un cuerpo.

Ejercicio 1.2. Mostrar que las siguientes propiedades de la adición son válidas para todo cuerpo F y para todo $x, y, z \in F$.

- Si $x + y = x + z$, entonces $y = z$.
- Si $x + y = x$, entonces, $y = 0$.
- Si $x + y = 0$, entonces, $x = -y$.
- $-(-x) = x$.

Ejercicio 1.3. Mostrar que las siguientes propiedades, análogas para la multiplicación, son válidas para todo cuerpo F y para todo $x, y, z \in F$.

- Si $xy = xz$ y $x \neq 0$, entonces $y = z$.
- Si $xy = x$ y $x \neq 0$, entonces, $y = 1$.
- Si $xy = 1$, entonces, $x = 1/y$.
- Si y $x \neq 0$, entonces $1/(1/x) = x$.

Ejercicio 1.4. Provar las siguientes propiedades, para todo $x, y, z \in F$

- $0 \cdot x = 0$.
- Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces, $xy \neq 0$.
- $(-x)y = x(-y) = -(xy)$.
- $(-x)(-y) = xy$.

Definición 1.8. Un **cuerpo ordenado** es un cuerpo F, que además es un conjunto ordenado, que satisface las siguientes propiedades

- Para todo $x, y, z \in F$, con $y < z$, se tiene $x + y < x + z$.
- Para todo $x, y \in F$, con $x > 0$, $y > 0$, se tiene que $xy > 0$.

Si $x > 0$ decimos que x es **positivo** y si $x < 0$, **negativo**.

Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

Algunas reglas habituales para trabajar con desigualdades con listadas a continuación

Ejercicio 1.5. Provas que las siguientes propiedades son válidas en todo cuerpo ordenado.

- Si $x > 0$ entonces $-x < 0$ y vice-versa.
- Si $x > 0$ y $y < z$ entonces $xy < xz$.
- Si $x < 0$ y $y < z$ entonces $xy > xz$.
- Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$. En particular $1 > 0$.
- Si $0 < x < y$ entonces $0 < 1/y < 1/x$.

1.3. El cuerpo de los reales.

Teorema 1.1. Existe un cuerpo ordenado $\mathbb{R}$, que posee la propiedad del supremo. Además, $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como sub-cuerpo.

La última afirmación indica que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y que las operaciones de adición y multiplicación, cuando son aplicadas a miembros de $\mathbb{Q}$ conciden con las operaciones usuales en $\mathbb{Q}$.

Referimos al lector a la referencia [1], Teorema 1.19 para una prueba de este teorema.

Ejercicio 1.6. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

- si $x > 0$, el conjunto
$$A = \{x, 2x, 3x, 4x, ...\}.$$
no es acotado superiormente.
- si $x < y$, existe un racional $p \in \mathbb{Q}$, tal que $x < p < y$.

Ejercicio 1.7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$ y $n \geq 1$, entero positivo. Muestre que
$$b^n - a^n < (b - a)nb^{n-1} \tag{1.9}$$

Teorema 1.2. Para todo real $x > 0$ y para todo entero $n \geq 1$, existe un único real positivo y, tal que
$$y^n = x. \tag{1.10}$$

Prueba. Claramente existe como máximo un y satisfaciendo (1.10) ya que si $0 < y_1 < y_2$, entonces $y_1^n < y_2^n$.

Sea E el conjunto de todos los números reales positivos t, que satisfacen $t^n < x$.

El conjunto E es no-vacio: considere $t = \frac{x}{x+1}$. Se tiene que $t < 1$ y por tanto $t^n < t < x$. Luego $t \in E$.

E es acotado superiormente: si $t > x + 1$ entonces $x < t \leq t^n$. Luego $t \neq E$ y $x + 1$ es una cota superior de E.

Luego, existe $y = \sup E$.

Supongamos, en primer lugar, que $y^n < x$. En este caso, podemos considerar h, $0 < h < 1$, tal que
$$h < \frac{x - y^n}{n(y + 1)^{n-1}}. \tag{1.11}$$

Del ejercicio 1.7 tenemos

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+1)^{n-1} < x - y^n \tag{1.12}$$

Luego $(y+h)^n < x$ y $y+h \in E$. Esto contradice que y es una cota superior de E.

Suponga ahora que $y^n > x$. Considere

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}. \tag{1.13}$$

Luego $y - k > 0$. Observemos que $y - k$ es una cota superior de E: Suponga que $t \geq y - k$. Luego

$$y^n - t^n \leq y^n < (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x \tag{1.14}$$

Luego $t^n > x$ y $t \notin E$. Esto prueba que $y - k$ es una cota superior de E.

Como $k > 0$, esto último contradice el hecho que y es la menor cota superior de E.

Por lo tanto, $y^n = x$.

$\square$

Observación 1.4. El único real positivo y, que satisface $y^n = x$, es llamado raíz enésima de x y es denotado por $x^{1/n}$.

Ejercicio 1.8. Sean a, b reales positivos y $n \geq 1$ entero positivo, muestre que

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n} b^{1/n} \tag{1.15}$$

Capítulo 2

Conjuntos Finitos

2.1. Funciones

Definición 2.1. Considere dos conjuntos A y B y suponga que a cada elemento $x \in A$ es asociado un elemento de B, denotado por $f(x)$. En este caso decimos que f es una función de A a B y utilizamos la notación

$$f : A \to B.$$

Los conjuntos A y B son llamados **dominio** y **co-dominio** de la función f.

Definición 2.2. Sean A y B dos conjuntos y f una función de A a B. Si $E \subset A$, definimos la imagen del subconjunto E por f, al conjunto

$$f(E) := \{f(x) : x \in E\}.$$

En particular, decimos que $f(A)$ es el **rango** de la funcion f.

Claramente tenemos que $f(A) \subset B$. En caso que $f(A) = B$ decimos que la funcion f es **sobreyectiva**. En este caso, para todo $y \in B$ existe al menos un $x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Si $E \subset B$, $f^{-1}(E)$ denota al conjunto de elementos de A tales que $f(x) \in E$. En este caso, decimos que $f^{-1}(E)$ es la imagen inversa de E por f. Si $y \in B$, $f^{-1}(y)$ es el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $f(x) = y$. Si para todo $y \in B$, $f^{-1}(y)$ consiste en, como máximo un elemento, decimos que la función f es **inyectiva**. Equivalentemente, una función $f : A \to B$ es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Decimos que una función $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva. En este caso tambien decimos que f es una **biyección** entre A y B.

2.2. Números Naturales

Toda la teoría de los numeros naturales puede ser deducida de los axiomas abajo conocidos como los **Axiomas de Peano**.

Admitimos la existencia de un conjunto $\mathbb{N}$, cuyos elementos son llamados **números naturales** y una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número $s(n)$, valor que la función f asume en el punto n, es llamado sucesor de n.

La función s satisface los siguientes axiomas:

P1 $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es inyectiva. Dos números que tienen el mismo sucesor son iguales.

P2 Existe un único número natural que no es sucesor de ningún otro. Este número es llamado 'uno' y es representado por el símbolo 1. En otras palabras,
$$s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

P3 (Principio de Inducción). Si $X \subset \mathbb{N}$ es un subconjunto que satisface las siguientes propiedades:

- $1 \in X$.
- Para todo $n \in X$, se tiene que $s(n) \in X$.

Entonces, $X = \mathbb{N}$.

El Principio de Inducción tambien puede ser enunciado de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad referente a los números naturales. Si 1 goza de la propiedad $\mathcal{P}$ y si del hecho que un número natural n goza de la propiedad $\mathcal{P}$, se puede concluir que $s(n)$ goza de la propiedad $\mathcal{P}$, entonces todos los números naturales gozan de dicha propiedad.

Ejemplo 2.1. Supongamos que queremos probar que ningún natural puede ser sucesor de sí mismo. Definimos

$$X = \{n \in \mathbb{N} : s(n) \neq n\}$$

El objetivo es probar que $X = \mathbb{N}$. Utilizemos el Principio de Inducción:

- Del axioma P2, para todo natural $n \in \mathbb{N}$, $1 \neq s(n)$. En particular, $1 \neq s(1)$. Luego $1 \in X$.

- Supongamos que $n \in X$. Luego $s(n) \neq n$. Del axioma P1 tenemos que $s(s(n)) \neq s(n)$. Luego $s(n) \in X$.

Luego, sigue del axioma P3, que $X = \mathbb{N}$, o sea, $s(n) \neq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, son definidas dos operaciones fundamentales: la **adición**, que asocia a cada par de números (m, n) su **suma** $m+n$, y la **multiplicación**, que hace corresponder al par (m, n) su **producto** $m \cdot n$. Estas operaciones son caracterizadas por las siguientes igualdades, válidas para todo $m, n \in \mathbb{N}$, que les sirven de definición:

- $m + 1 = s(m)$

- $m + s(n) = s(m + n)$

- $m \cdot 1 = m$

- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + n$

El lector puede consultar la referencia [2] para una demostración de las siguientes propiedades de la adición y multiplicación, válidas para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$:

- Conmutatividad: $m + n = n + m$, $m \cdot n = n \cdot m$.

- Asociatividad: $(m + n) + p = m + (n + p)$, $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$

- Distributividad: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

- Ley de corte: $m + n = m + p \implies n = p$, $m \cdot n = m \cdot p \implies n = p$.

Dados dos número naturales $m, n \in \mathbb{N}$, decimos que m **es menor que** n (escribimos $m < n$) si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p + m = n$.

Esta relación define un orden en $\mathbb{N}$, es decir, son válidas las siguientes dos propiedades, para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$:

- Transitividad: $m < n$, $n < p \implies m < p$

- Tricotomia: Vale una y solo una de las siguientes alternativas: $m < n, n < m, m = n$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, la notación $[n]$ indica el conjunto de números naturales menores o iguales a n.

Ejercicio 2.1. Muestre que dado un número $n \in \mathbb{N}$, no existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $n < p < n+1$.

Teorema 2.1. (**Principio de Buena Ordenación**). Sea $A \subset \mathbb{N}$, no vacío. Luego A posee un **menor elemento**, es decir, existe $n_0 \in A$ tal que para todo $n \in A$ se tiene que $n_0 \leq n$.

Prueba. Si $1 \in A$ entonces 1 será el menor elemento de A. Si $1 \notin A$ considere el siguiente conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} : [n] \subset \mathbb{N} \backslash A\}$$

Observemos que $1 \in X$ y que $X \subset \mathbb{N} \backslash A \implies X \neq \mathbb{N}$. Luego, el axioma P3 no puede valer para el conjunto X. En particular, existe $m \in \mathbb{N} \backslash A$ tal que $m+1 \notin \mathbb{N} \backslash A$. Claramente $m+1 \in A$ y para todo $n < m+1$, se tiene que $n \notin A$. Luego $n_0 = m+1$ es el menor elemento de A. $\square$

Definición 2.3. Decimos que un conjunto X es **finito** cuando es vacío o cuando existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ y una biyección f entre $[n]$ y X. Escribiendo $x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n)$ tenemos que $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. En este caso, decimos que n es el **número de elementos** del conjunto X. El teorema abajo implica que el número de elementos de un conjunto es una cantidad bien definida, es decir, no depende de la biyección particular f escogida.

Teorema 2.2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, no existe una biyección entre $[n]$ y una parte propia.

Prueba. Considere el conjunto X de todos los números naturales n tal que no existe una biyección entre $[n]$ y una parte propia.

El objetivo es probar que $X = \mathbb{N}$. Para probar esto utilizaremos Inducción:

- $1 \in X$, ya que la única parte propia de $[1]$ es el conjunto vacío $\emptyset$ y claramente no existe una biyección entre $\emptyset$ y $[1]$.
- Supongamos que $n \in X$. Probaremos que $n+1 \in X$. Suponga, por contradicción, que $n+1 \notin X$. Luego existe una función biyectiva $f : [n+1] \to A$, donde A es una parte propia de $[n+1]$. Tenemos dos casos a considerar:

- $n+1 \notin A$.
  En este caso A es una parte propia de $[n]$ y la restriccion de f a $[n]$ es una biyeccion entre $[n]$ y $A \backslash \{f(n+1)\}$.

- $n+1 \in A$.
  Sea $m \in [n+1]$ tal que $f(m) = n+1$. Luego la función $g : [n] \to A \backslash \{n+1\}$ definida por $g(p) = f(p)$ si $p \neq m$ y $g(m) = f(n+1)$, es una función biyectiva entre $[n]$ y $A \backslash \{n+1\}$, parte propia de $[n]$.

Luego, por el axioma P3 tenemos que $X = \mathbb{N}$, es decir, no existe una biyección entre $[n]$ y una parte propia de este, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejercicio 2.2. Probar que si $f : [m] \to X$ y $g : [n] \to X$ son biyecciones, entonces $m = n$.

Ejercicio 2.3. Mostrar que no existe una biyección entre un conjunto finito y una parte propia de él.

Ejercicio 2.4. Probar que todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

Ejercicio 2.5. Dado un conjunto finito X, probar que una función $f : X \to X$ es inyectiva si y solo si es sobreyectiva.

Ejercicio 2.6. Probar que un conjunto $X \subset \mathbb{N}$ es finito si y solo si es acotado (es decir, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in X$, $n \leq p$.)

Capítulo 3

Conjuntos infinitos

3.1. Conjuntos infinitos

Decimos que un conjunto es **infinito** cuando no es finito. Así, X es infinito si no es vacío y para todo $n \in \mathbb{N}$, no existe biyección $f : [n] \to X$.

Del ejercicio 2.6 sabemos que $\mathbb{N}$, al ser ilimitado, es un conjunto infinito. Tambien es infinito el conjunto de los números pares, y el conjunto de los números primos.

Ejercicio 3.1. Muestre que si el conjunto X es infinito, existe una aplicación inyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.

3.2. Conjuntos enumerables

Definición 3.1. Decimos que un conjunto X es **enumerable** cuando es finito o cuando existe una biyección $f : \mathbb{N} \to X$. En este caso, decimos que f es una enumeración de los elemntos de X. Escribiendo $x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n), ...$ tenemos que

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Teorema 3.1. Todo subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$, es enumerable.

Prueba. Vamos a construir una función $f : \mathbb{N} \to X$ biyectiva. Defina f

inductivamente:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \text{menor elemento de } X \\
f(2) &= \text{menor elemento de } X \backslash \{f(1)\} \\
&\vdots \\
f(n+1) &= \text{menor elemento de } X \backslash \{f(1), ..., f(n)\}
\end{aligned}$$

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $X \backslash \{f(1), ..., f(n)\}$ es no vacío. Luego, la función esta bien definida.

El conjunto de las imágenes esta ordenado, es decir

$$f(1) < f(2) < ... < f(n) < f(n+1) < ...$$

por lo que f es inyectiva y si existe $M \in X$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \neq M$, se tiene que para todo n

$$f(n) < M$$

por lo que M es una cota superior para el conjunto infinito $\{f(1), f(2), ...\}$. Luego f es sobreyectiva. □

Ejercicio 3.2. Considere la función $f : X \to Y$.

- Prueba que si f es inyectiva y Y es numerable, X tambien lo es.
- Prueba que si f es sobreyectiva y X es numerable, Y tambien lo es.
- Pruebe que todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

3.3. Familias de conjuntos

Sea L un conjunto, cuyos elementos llamaremos **índices** y representaremos genericamente por λ. Supongamos que a cada elemento $\lambda \in L$ está asociado un conjunto denotado por E_λ.

El conjunto cuyos elementos son los conjuntos E_λ será denotado por $\{E_\lambda\}_{\lambda \in L}$. En este caso decimos que $\{E_\lambda\}_{\lambda \in L}$ es una colección de conjuntos o una familia de conjuntos.

Definición 3.2. Dada una familia de conjuntos $\{E_\lambda\}_{\lambda\in L}$, definimos la **unión** de esa familia al conjunto formado por elementos que pertenecen a al menos uno de los conjuntos E_λ. Este conjunto es representado por $\bigcup_{\lambda\in L} E_\lambda$ o simplemente $\bigcup E_\lambda$. Así

$$\bigcup_{\lambda\in L} E_\lambda = \{x : \text{ existe } \lambda\in L \text{ tal que } x\in E_\lambda\}.$$

Analogamente, la **intersección** de la familia $\{E_\lambda\}_{\lambda\in L}$ es el conjunto formado por elementos que pertenecen simultaneamente a todos los conjuntos E_λ. Este conjunto es denotado por $\bigcap_{\lambda\in L} E_\lambda$ o simplemente $\bigcap E_\lambda$. Por lo tanto,

$$\bigcap_{\lambda\in L} E_\lambda = \{x : \text{ para todo } \lambda\in L,\, x\in E_\lambda\}.$$

Si L consiste en los naturales $1, 2, ..., n$ usualmente escribimos

$$\bigcup_{\lambda\in L} E_\lambda = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1\cup ...\cup E_n,$$

$$\bigcap_{\lambda\in L} E_\lambda = \bigcap_{i=1}^{n} E_i = E_1\cap ...\cap E_n.$$

Si $L=\mathbb{N}$, la notación usual es

$$\bigcup_{\lambda\in L} E_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E_1\cup ...\cup E_n\cup ...$$

$$\bigcap_{\lambda\in L} E_\lambda = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = E_1\cap ...\cap E_n\cap ...$$

Ejercicio 3.3. Sea $L=(0,1] := \{x\in\mathbb{R} : 0 < x \le 1\}$. Para todo $x\in L$ defina

$$E_x = \{y\in\mathbb{R} : 0 < y \le x\}.$$

Calcule los conjuntos $\bigcup_{\lambda\in L} E_\lambda$, $\bigcap_{\lambda\in L} E_\lambda$.

Definición 3.3. El **producto cartesiano** de una familia de conjuntos $\{E_i\}_{i\in L}$ es el conjunto de las funciones $f : L\to\bigcup E_i$ cuyo dominio es el conjunto de indices L y sus imágenes son elementos de algún E_i, que cumplen que para cada $i\in L$ se tiene $f(i)\in E_i$:

$$\prod_{i\in L} E_i = \left\{ f : L\to \bigcup E_i \mid \text{para cada } i\in L\,, f(i)\in E_i\right\}$$

En particular se destaca el producto cartesiano de una secuencia de conjuntos $E_1, E_2, ..., E_n, ...$, el cual es representado por las siguientes notaciones

$$\prod_{i\in L} E_i = \prod_{i\in 1}^{\infty} E_i = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \times ...$$

Los elementos de este conjunto son la secuencias $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ sujetas a la condición de $x_n \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2. Sea $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una secuencia de conjuntos infinitos enumerables. Probar que la unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ es un conjunto infinito enumerable.

Prueba. Considere para cada conjunto E_n una enumeración de sus elementos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, ...\} \\ E_2 &= \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, ...\} \\ E_3 &= \{x_1^3, x_2^3, x_3^3, ...\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Los elementos de $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ pueden ser organizados en una secuencia

$$x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_1^3, x_2^2, x_3^1, x_1^4, x_2^3, x_3^2, x_4^1, ...$$

Esta enumeración define una función sobreyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ probrando que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ es infinito enumerable. □

Ejercicio 3.4. Pruebe que el conjunto de los numeros enteros

$$\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

es enumerable.

Ejercicio 3.5. Construyendo una función inyectiva $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pruebe que el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

Ejercicio 3.6. Considere una colección finita de conjuntos enumerables $X_1, X_2, ..., X_n$. Pruebe que el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ es enumerable.

Ejercicio 3.7. Considere el conjunto E formado por las secuencias infinitas de ceros y unos:

$$E = \{(x_1, x_2, ...) : x_n \in \{0, 1\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

Este conjunto tambien puede ser visto como el producto cartesiano infinito del conjunto $A = \{0, 1\}$, es decir

$$E = \prod_{i=1}^{\infty} A = A \times A \times ... \times A_n \times ...$$

Pruebe que toda función $f : \mathbb{N} \to E$, no puede ser sobreyectiva, es decir, para toda $f : \mathbb{N} \to E$ existe $x \in E$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(n) \neq x$.

Concluya que el conjunto E es no enumerable.

3.4. $\mathbb{R}$ es no enumerable.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, definimos el intervalo cerrado $[a, b]$ como el conjunto de números reales entre a y b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Observe que este conjunto es no vacío.

Ejercicio 3.8. Considere una secuencia de intervalos cerrados $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{\infty}$ encajados, es decir:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

- Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
- Sean $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $b = \text{ínf}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Probar que $a \leq b$.
- Probar que $\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] = [a, b]$. En particular, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a_i, b_i]$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.3. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es no enumerable.

Prueba. El objetivo es probar que no existe ninguna función entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ que sea sobreyectiva.
Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Construiremos inductivamente una secuencia de intervalos cerrados encajados

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(n) \notin [a_n, b_n]$.
Escoja $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(1) < a_1 < b_1$.
Dado $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ con $a_n < b_n$ escoja $a_{n+1}, b_{n+1} \in [a_n, b_n]$ con $a_{n+1} < b_{n+1}$ y

$f(n+1) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
Del ejercicio anterior sabemos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular $x \neq f(n)$ para todo n, que implica que la función f no es sobreyectiva. $\square$

Capítulo 4

Secuencias

4.1. Espacios Métricos

Definición 4.1. Dado un conjunto X decimos que una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una **distancia** si satisface las siguientes propiedades, para todo $x, y, z \in X$

- $d(x, y) \geq 0$.
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

En este caso, decimos que el par (X, d) es un **espacio métrico**.

A través de la definición de distancia daremos rigurosidad a las ideas intuitivas de cercania y proximidad.

Observe que dado un subconjunto $Y \subset X$, la restricción de la función d a Y otorga a este la estructura de espacio métrico.

Ejercicio 4.1. Dado un conjunto X, pruebe que la función $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x, y) = 0$ si $x = y$ define una distancia para el conjunto X. (Esta es a veces llamada **distancia trivial**)

Ejercicio 4.2. Considere la función **valor absoluto** $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pruebe que la función $(x, y) \mapsto |x - y|$ define una distancia en el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

4.2. Secuencias y Subsecuencias

Decimos que una **secuencia** es una función $f : \mathbb{N} \to X$. Si $f(n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, denotamos a la secuencia f por el símbolo $\{x_n\}$ o por $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$. Los elementos x_n son los **términos** de la secuencia.

Como $x_n \in X$ para todo n, decimos que $\{x_n\}$ es una secuencia en X o una secuencia de elementos de X. Note que los elementos $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ no necesitan ser distintos.

Los siguientes son ejemplos de secuencias de números reales:

- $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\frac{1}{n}, ...\}$
- $\{1, 2, 3, 4, ...n, ...\}$
- $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$

Dada una secuencia $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ y un subconjunto infinito $N \subset \mathbb{N}$,

$$N = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...\},$$

decimos que $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...\}$ es una **subsecuencia** de $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Los siguientes son ejemplos de subsecuencias:

- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, ...\frac{1}{2k}, ...\}$ es subsecuencia de $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\frac{1}{n}, ...\}$
- $\{1, 3, 9, ..,3^k, ...\}$ es subsecuencia de $\{1, 2, 3, 4, ...n, ...\}$
- $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, ...\}$ es subsecuencia de $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$

4.3. Convergencia

Una secuencia $\{x_n\}$ en un espacio métrico X es convergente si existe un elemento $y \in X$ que satisface la siguiente propiedad: Para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que depende de ϵ, tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, y) \leq 0$.

En este caso decimos que $\{x_n\}$ converge a y o que y es el limite de $\{x_n\}$ y escribimos $x_n \to y$ o

$$\lim x_n = y.$$

Cuando $\{x_n\}$ no converge decimos que **diverge**.

Si la secuencia $\{x_n\}$ pertenece a los números reales, utilizando la métrica usual $(x, y) \mapsto |x - y|$, la definición de convergencia queda:

$$\text{Para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que, si } n \geq n_0 \implies |x_n - y| \leq \epsilon. \quad (4.1)$$

De la definición de convergencia podemos deducir algunas propiedades básicas acerca de las secuencias convergentes de números reales:

Teorema 4.1. Dada una secuencia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ se tiene que:

a) Si $\{x_n\} \to y$ entonces $\{x_n\}$ es un conjunto acotado.

b) Si $\{x_n\} \to y$ y $\{x_{n_k}\}$ es una subsecuencia de $\{x_n\}$, entonces $x_{n_k} \to y$.

c) Si $\{x_n\} \to y$ y $\{x_n\} \to y'$ entonces $y = y'$.

Prueba. a) Tome $\epsilon = 1$ en (4.1). Luego, para todo $n \geq n_0(1)$ se tiene $|x_n - y| \leq 1$. Luego, definiendo $M = \max\{|x_1 - y|, ..., |x_{n_0-1} - y|, 1\}$ se tiene que

$$|x_n - y| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Dado $\epsilon > 0$ y $x_n \to$ y sabemos que existe $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $|x_n - y| \leq \epsilon$. Fijada la subsecuencia $\{x_{n_k}\}$, tome $k_0 \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $n_{k_0} \geq n_0(\epsilon)$. Luego, para todo $k \geq k_0$ se tiene que $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0(\epsilon)$ por lo que $|x_{n_k} - y| \leq \epsilon$.

c) Suponga, por contradicción, que $y < y'$. Tome $0 < \epsilon < \frac{y'-y}{2}$. Luego de la definición de convergencia podemos encontrar $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0(\epsilon)$

$$|x_n - y| \leq \epsilon,$$
$$|x_n - y'| \leq \epsilon.$$

Esto implica que

$$x_n \leq y + \epsilon < y + \frac{y' - y}{2} = y' - \frac{y' - y}{2} < y' - \epsilon \leq x_n.$$

Esto último es una contradicción.

$\square$

Ejemplo 4.1. La secuencia $x_n = \frac{1}{n}$ es convergente y $\lim x_n = 0$. De hecho, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$, suficientemente grande tal que $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon}$ (el conjunto $\mathbb{N}$ es ilimitado). Luego para todo $n \geq n_0$ se tiene que $x_n = 1/n \leq 1/n_0 \leq \epsilon$ o escribiendo de otro modo

$$|x_n - 0| \leq \epsilon.$$

Ejemplo 4.2. Si $x_n = n$, la secuencia $\{x_n\}$ es ilimitada y por lo tanto, es divergente.

Ejemplo 4.3. La secuencia $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ es divergente ya que posee dos subsecuencias que convergen a limites distintos.

Para secuencias en $\mathbb{R}$, podemos examinar la relación entre convergencia, por un lado y operaciones algebraicas, por otro lado.

Ejercicio 4.3. Considere las secuencias $\{s_n\}, \{t_n\} \subset \mathbb{R}$ y suponga $\lim s_n = s$, $\lim t_n = t$. Entonces,

1. $\lim(s_n + t_n) = s + t$;
2. $\lim(cs_n) = cs$, para todo $c \in \mathbb{R}$;
3. $\lim(s_n t_n) = st$;
4. $\lim 1/s_n = 1/s$, toda vez que $s_n \neq 0$ y $s \neq 0$.

El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para la convergencia de secuencias.

Teorema 4.2. Toda secuencia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ limitada y monótona es convergente.

Prueba. Considere $\{x_n\}$ monótona no-decreciente:

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1} \leq ...$$

Sea $x = \sup\{x_n\}$. De la definición de supremo se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, $x - \varepsilon$ no es cota superior del conjunto $\{x_n\}$. Luego existe un elemento de la secuencia $\{x_n\}$ (llamemos a este elemento x_{n_0}) tal que, $x - \varepsilon < x_{n_0}$. Luego, para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x$$

Esto último prueba que $\lim x_n = x$. $\square$

Teorema 4.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** Toda secuencia limitada de números reales posee una subsecuencia convergente.

Prueba. Considere $\{x_n\}$ un secuencia de números reales limitada. Dado $n \in \mathbb{N}$, decimos que n es *destacado* si para todo $m \geq n$ se tiene que

$$x_m \geq x_n.$$

Considere el conjunto $D \subset \mathbb{N}$ de los números *destacados*.

- (Caso 1) El conjunto D es infinito.
  En este caso, sea
  $$D = \{n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...\}$$
  una enumeración de los elementos de D con
  $$n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$$
  En este caso la subsecuencia
  $$x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, ...$$
  es no-decreciente y limitada (al ser $\{x_n\}$ limitada). Luego, por el teorema anterior, es convergente.

- (Caso 2) El conjunto D es finito.
  Sea x_{n_1} el primer término de la secuencia a partir del cual ningún término posterior de la secuencia es destacado. Suponque que la subsecuencia está definida hasta el k-esimo termino
  $$x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}$$
  y que estos satisfacen la relación
  $$x_{n_1} > x_{n_2} > ... > x_{n_k}.$$
  Sea $x_{n_{k+1}}$ el primer término de la secuencia tal que $n_k < n_{k+1}$ y
  $$x_{n_k} > x_{n_{k+1}}.$$
  Este elemento existe ya que x_{n_k} no es destacado.
  Este procedimiento define una subsecuencia decreciente y limitada, que por el teorema anterior, es convergente.

$\square$

Capítulo 5

Continuamos deduciendo propiedades sobre secuencias convergentes.

Teorema 5.1. Suponga que las secuencias $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son convergentes, $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, y $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que $x \leq y$.

Prueba. Suponga, por contradicción, que $x > y$. Tome $0 < \epsilon < \frac{x-y}{2}$. Luego de la definición de convergencia podemos encontrar $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0(\epsilon)$

$$|x_n - x| \leq \epsilon,$$
$$|y_n - y| \leq \epsilon.$$

Esto implica que

$$y_n \leq y + \epsilon < y + \frac{x-y}{2} = x - \frac{x-y}{2} < x - \epsilon \leq x_n.$$

Luego $y_n < x_n$, que contradice la hipotesis. □

Observación 5.1. Decimo que una propiedad P es válida para todo n suficientemente grande cuando lo es para todo $n \geq M$ para algun $M \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, notamos que para el teorema anterior ser valido es suficiente que $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande.

Ejercicio 5.1. Muestre que si $x_n \to a$ y $a < b$, entonces $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.

Ejercicio 5.2. Muestre que si $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n y $\lim x_n = \lim z_n = a$, entonces $\lim y_n = a$.

Ejercicio 5.3. Considere una secuencia $\{x_n\}$ de numeros reales tales que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1.$$

El objetivo de este ejercicio es mostrar que $\lim x_n = 0$.

- Pruebe que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ para todo n suficientemente grande. Concluya que $\{x_n\}$ es decreciente a partir de un cierto valor.
- Mostrar que $\{x_n\}$ es convergente.
- Concluir que $\lim x_n = 0$.

Ejercicio 5.4. Utilice el ejercicio anterior para demostrar la convergencia de las siguientes secuencias

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

Ejemplo 5.1. Dado 0 <a <1, podemos considerar la secuencia

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n.$$

Observe que , haciendo $b = 1$ en la expresión:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + b^n),$$

tenemos que

$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Entonces, la secuencia creciente $\{x_n\}$ es convergente ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{a-1} + \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1}{1-a}.$$

Ejemplo 5.2. Considere la secuencia

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Observando que

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

concluimos que la secuencia $\{x_n\}$, al ser creciente y limitada, es convergente. Este limite es denotado por e,

$$\lim_{n\to\infty} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = e.$$

Teorema 5.2. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Prueba. De la formula del Binomio de Newton obtenemos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \tag{5.1}$$

$$< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < e. \tag{5.2}$$

Ademas,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^{n+1-k}} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\frac{n+1}{n+1}\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n-k+2}{n+1}.$$

Entonces la secuencia $\{(1+1/n)^n\}$ es creciente y limitada superiormente y por lo tanto, convergente. En particular

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e. \tag{5.3}$$

Por otro lado, tenemos que para todo $p < n$ se tiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n},$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} = \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!} = e. \tag{5.4}$$

De la Ecuaciones (5.3) y (5.4) concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

□

Ejercicio 5.5. Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + ... + b^n).$$

Ejercicio 5.6. Muestre que la formula del binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + b^n,$$

es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Capítulo 6

Series

Definición 6.1. Dada una secuencia $\{x_n\}$, decimos que la **serie** $\sum x_n$ es la secuencia formada por las sumas parciales

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Decimos que la serie $\sum x_n$ es convergente cuando la secuencia $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ es convergente.

Ya vimos algunas series convergentes. Sabemos que las series $\sum a^k$ con $0 < a < 1$ y $\sum 1/k!$ son convergentes, con

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{1}{1-a},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Observe que si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ la serie $\sum x_n$ es convergente si y solo si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq L$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir si el conjunto $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ es acotado.

Utilizaremos este hecho para estudiar la convergencia de la serie $\sum \dfrac{1}{n^p}$.

Teorema 6.1. La serie $\sum \dfrac{1}{n^p}$ es convergente para todo $p > 1$ y divergente para $p \leq 1$.

Prueba. Supongamos que p >1. En este caso

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} < \sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k^p} &= 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\\ &+\left(\frac{1}{8^p}+...+\frac{1}{15^p}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}+...+\frac{1}{(2^n-1)^p}\right)\\ &< 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\\ &+\left(\frac{1}{8^p}+...+\frac{1}{8^p}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}+...+\frac{1}{(2^{n-1})^p}\right)\\ &= 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+...+\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} < \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}.\end{aligned}$$

Luego, la serie $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ es convergente.

Si $p \leq 1$, el conjunto $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ es ilimitado:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k^p} &= 1+\frac{1}{2^p}+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}\right)\\ &+\left(\frac{1}{9^p}...+\frac{1}{16^p}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^p}+...+\frac{1}{(2^n)^p}\right)\\ &> 1+\frac{1}{2^p}+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}+\frac{1}{8^p}\right)\\ &+\left(\frac{1}{16^p}...+\frac{1}{16^p}\right)+...+\left(\frac{1}{(2^n)^p}+...+\frac{1}{(2^n)^p}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2^p}+\frac{2}{4^p}+\frac{4}{8^p}+...+\frac{2^{n-1}}{(2^n)^p} = 1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}2^{k(1-p)} \geq 1+\frac{n}{2}.\end{aligned}$$

En este caso $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ es divergente. □

Daremos un criterio de convergencia de series a traves de secuencias de Cauchy. Decimos que una secuencia $\{x_n\}$ de un espacio métrico (X,d) es **de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Es fácil de probar que toda secuencia convergente es tambien una secuencia de Cauchy. La recíproca tambien es verdadera para secuencias de números reales. De hecho, decimos que un espacio métrico es **completo** cuando las secuencias de Cauchy son convergentes.

Ejercicio 6.1. Pruebe que toda secuencia convergente es una secuencia de Cauchy.

Ejercicio 6.2. Sea $\{x_n\}$ una secuencia de Cauchy, de números reales.

- Pruebe que el conjunto $\{x_n\}$ es limitado.
- Pruebe que $\{x_n\}$ posee una subsecuencia convergente.
- Sea $\{x_{n_k}\}$ subsecuencia convergente de $\{x_n\}$ con $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Del ejercicio anterior podemos establecer una condición necesaria y suficiente para la convergencia de series. La serie $\sum x_n$ es convergente si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| \leq \varepsilon.$$

Definición 6.2. Decimos que una serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum |x_n|$ es convergente.

El proximo teorema prueba que todas las series absolutamente convergentes tambien son convergentes.

Teorema 6.2. Todas las series absolutamente convergentes tambien son convergentes.

Prueba. La prueba de este resultado es muy simple utilizando la condición de convergencia de Cauchy.

De la convergencia de la serie $\sum |x_n|$ tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n > n_0$,

$$\sum_{k=n}^{m} |x_k| \leq \varepsilon.$$

Luego

$$\left| \sum_{k=n}^{m} x_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |x_k| \leq \varepsilon,$$

que prueba que $\sum x_n$ es convergente. □

Ejemplo 6.1. La serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es convergente pero no absolutamente convergente.

Ejercicio 6.3. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos secuencias de números reales tales que:

1. $\{\sum_{k=1}^{n} y_k\}$ es acotado,

2. La secuencia $\{x_n\}$ es no-creciente

3. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

El objetivo de este ejercicio es probar que la serie $\sum x_n y_n$ es convergente.

- Sea $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$. Mostrar que para $n < m$

$$\sum_{k=n}^{m} x_k y_k = \sum_{k=n}^{m-1} Y_k(x_k - x_{k+1}) - Y_{n-1}x_n + Y_m x_m.$$

- Utilizando la expresion de arriba y el criterio de Cauchy, muestre que la serie $\sum x_n y_n$ es convergente.

Ejercicio 6.4. Utilice el ejercicio anterior para mostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es convergente

Bibliografía

[1] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, INTERNATIONAL SERIES IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS, McGraw-Hill, Inc, THIRD EDITION, 1976.

[2] E. L. Lima, *Analise Real*, vol 1, Funções de uma variavel real (11a edición) Coleção Matemática Universitaria, IMPA 2012.